2014 à l'honneur ! (Sujet n° 8)

Énoncé :

Trouver un nombre qui soit divisible par 2014 et dont la somme des chiffres (en écriture décimale) vaille 2014.
Peut-on déterminer le plus petit nombre vérifiant les conditions précédentes ?

Solution :

• Il est facile de trouver des nombres divisibles par 2014 : le premier est 2014 et tous ses multiples le sont aussi : $2014\times2 = 4028$; $2014\times3 = 6042$; $2014\times4 = 8056$,…
Mais la somme de leur chiffres est loin de faire 2014 :
La somme des chiffres de 2014 est $2+0+1+4 = 7$, celle de 4028 est 14, celle de 6042 est 12, ….

Pour obtenir une somme aussi grande que 2014 tout en gardant des multiples de 2014, on peut « coller » les 2014 : ainsi le nombre 2014201420142014 (où le nombre 2014 a été « collé » 4 fois) est divisible par 2014 (son quotient est 1000100010001) et la somme de ses chiffres vaut $4\times7 = 28$. Cela ne suffit pas.

Il faut alors continuer le « collage ». Mais jusqu'où ? L'idéal aurait été que 2014 soit un multiple de 7 mais ce n'est pas le cas : on a $2014 = 287\times7 + 5$.
Le nombre $\underbrace{20142014\ldots20142014}_{\text{287 fois le nombre 2014}}$ est divisible par 2014 et la somme de ses chiffres est $287\times7 = 2009$.
On se rapproche...
Il reste à insérer quelques chiffres (dont la somme vaut 5) tout en conservant la divisibilité par 2014.

Il y a plusieurs manières de faire : une solution est de trouver un multiple de 2014 dont la somme des chiffres vaut 5. Une recherche (aidée par un petit programme en Python) donne $2014\times5015 = 10100210$.
Ainsi le nombre $\boxed{\underbrace{20142014\ldots20142014}_{\text{287 fois le nombre 2014}}10100210}$ répond à la question.

Pour ne pas aller si loin dans la recherche des multiples, on aurait pu remarquer que 7 (la somme des chiffres de 2014) + le chiffre 5 = 12 et que l'on a vu plus haut que $3\times2014 = 6042$ a pour somme de chiffres 12. Ainsi, le nombre $\boxed{\underbrace{20142014\ldots20142014}_{\text{286 fois le nombre 2014}}6042}$ répond aussi à la question, tout en étant moins long (il n'a que 1148 chiffres au lieu de 1156 !). Cela fait quand même un peu beaucoup.

• D'où la deuxième question : **comment déterminer le plus petit nombre vérifiant ces conditions ?**

Une idée, suggérée par l'énoncé, serait d'utiliser un ordinateur afin de déterminer ce nombre. On pourrait ainsi parcourir tous les entiers de 1 à ??? et tester pour chacun d'entre eux, s'il vérifie les deux conditions : « la somme de ses chiffres vaut 2014 » et « il est divisible par 2014 ».

Mais le programme effectuant ceci risque de ne pas donner de solutions dans un temps raisonnable.
En effet, déterminons le plus petit nombre dont la somme de ces chiffres vaut 2014 :
Si on veut un minimum de chiffres, il faut un maximum de chiffres 9 et comme $2014 = 9\times223 + 7$.
Le nombre $7\underbrace{9999...99999}_{\text{223 fois le chiffre 9}}$ est donc le plus petit nombre dont la somme des chiffres vaut 2014 (il comporte 224 chiffres). On comprend mieux qu'avec l'idée du programme précédent, on n'est pas près d'obtenir la réponse même si, au lieu de tester tous les entiers, on teste tous les multiples de 2014.

L'idéal serait que ce nombre soit divisible par 2014 : ce n'est malheureusement pas le cas (un nombre divisible par 2014 donc par 2 doit forcément être pair).

Avant d’augmenter le nombre de chiffres du nombre cherché, voyons si on peut trouver un nombre de 224 chiffres répondant à nos deux conditions :
On a alors deux possibilités :

- soit on prend tous les multiples de 2014 et on teste la somme des chiffres.
- soit on prend tous les nombres dont la somme des chiffres fait 2014 et on teste la divisibilité par 2014.

La première méthode sera beaucoup trop longue car il y a un grand nombre de multiples de 2014.
Au contraire, le nombre de nombres de 224 chiffres dont la somme des chiffres fait 2014 est beaucoup plus faible. Ils sont constitués de 223 chiffres 9 et d’un chiffre 7 (qui ne conviennent pas car il n’y en a aucun de pair) ou de 222 chiffres 9 et de deux 8.
Dans ce cas là, un des 8 doit terminer le nombre afin d’obtenir un nombre pair.
Le programme en Python suivant permet de tester les 223 possibilités :

```
lessolutions=[]                    #On crée une liste dans laquelle sera stockée toutes les solutions
listedeschiffres=["9"]*(223-1)     #car 2014=9*223+7 et on va remplacer un 9 et un 7 par deux chiffres de
                                   même somme (=16)
quedes9="".join(listedeschiffres) #crée la chaine de caractères "9999....999" constituée de 222 chiffres 9.
for k in range(223):               #on teste les 223 possibilités
    #on insere un "8" à la position k dans la chaine de caractère
    nombrechaine=quedes9[:k]+str(8)+quedes9[k:]
    #puis le deuxième 8 à la fin
    nombre=int(nombrechaine+str(8)) #on reconvertit en nombre
    if nombre%2014==0:             #si le nombre est divisible par 2014
        lessolutions.append(nombre) #on ajoute la solution à la liste lessolutions
#on a fini tous les tests
lessolutions.sort()                #on trie les solutions dans l'ordre croissant
print("Et la réponse est ",lessolutions[0])      #le premier élément de la liste est la plus petite solution
```

Il est possible de simplifier ce programme sans utiliser les listes en affichant les candidats au fur et à mesure et de chercher ensuite manuellement quelle est le plus petit.
D’ailleurs, il n’y a qu’une seule possibilité.
Elle est obtenue en moins de 0,02 secondes et :

Le plus petit nombre divisible par 2014 et dont la somme des chiffres (en écriture décimale) vaut 2014 est :
9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999
99999999999999999999999899999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999
999999999999999999999999999999999999999999999999999998.

Olivier Rochoir