



On note $M(a; a^2)$ avec $a > 0$ l'un des deux points de tangence du grand cercle avec la parabole.

La tangente en ce point a pour équation $y = 2ax - a^2$

La normale a donc pour équation $y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$; elle coupe l'axe des ordonnées en $P(0; a^2 + \frac{1}{2})$.

On en déduit facilement que le rayon du grand cercle est $PM = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$

Si on note alors r le rayon d'un petit cercle, on a deux relations :

$$(*) \quad 4r = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$$

$$(**) \quad 6r = a^2 + \frac{1}{2}$$

Il en résulte que $16r^2 - 6r + \frac{1}{4} = 0$

Ce qui donne a priori deux solutions $r = \frac{6 - \sqrt{20}}{32}$ et $r = \frac{6 + \sqrt{20}}{32}$

La première est à exclure car la relation $(**)$ implique $r > \frac{1}{12}$; l'autre convient.

$$\text{Donc } r = \frac{6 + \sqrt{20}}{32}$$