L'énoncé demande d'étudier l'éventuelle suite vérifiant $u_1 = 1$, $u_2 = 6$, et pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1}^2 - 1 - u_n u_{n+2} = 0$

1. **Un lemme préliminaire**

- On pose d'abord l'ensemble E = { $(a,b) \in \mathbf{N}^{*2}$ / $a \leq b$ et $a^2 - 6ab + b^2 = 1$ }.
- Montrons l'énoncé :

  $\forall (a,b) \in$ E, $\Big($ l'équation $b^2 - 1 - ax = 0$ admet une unique solution réelle c et $(b,c) \in$ E $\Big)$

  En effet, soit $(a,b) \in$ E. Alors en particulier $a \geq 1 > 0$ impose a fortiori $a \neq 0$ et ainsi l'équation du premier degré a bien une unique solution réelle c donnée par : $c = \dfrac{b^2 - 1}{a}$.

  Remarquons ensuite que a est par définition une solution réelle (et même entière) de l'équation (clairement polynomiale de degré 2) $x^2 - 6bx + (b^2 - 1) = 0$ qui admet donc comme « autre » solution réelle (éventuellement comptée avec multiplicité) la valeur commune $6b - a = \dfrac{b^2 - 1}{a}$ (en utilisant la somme des racines d'une part, et le produit d'autre part, sachant $a \neq 0$) *:* la première forme donne $c = b + 4b + (b - a)$, ce qui assure que c est un entier naturel non nul (comme somme d'entiers naturels dont l'un au moins est non nul), et tel que $b \leq c$ (où on sait déjà que b est un entier naturel non nul), avec, d'après ce qui précède, $c^2 - 6bc + (b^2 - 1) = 0$ *i.e.* $b^2 - 6bc + c^2 = 1$: on a donc bien $(b,c) \in$ E.

2. **Conséquence par récurrence**

- En observant que $(1;6) \in$ E (vérification immédiate), c'est-à-dire que $(u_1,u_2) \in$ E, l'application du lemme permet d'obtenir par une récurrence immédiate que pour tout entier naturel non nul n, (u_n,u_{n+1}) est bien défini et $(u_n,u_{n+1}) \in$ E.

- Il en découle en particulier que pour tout entier naturel non nul n, on a :

  $u_n^2 - 6u_n u_{n+1} + u_{n+1}^2 = 1$ ce qui donne :

  $8u_n u_{n+1} + 1 = (6u_n u_{n+1} + 1) + 2u_n u_{n+1} = (u_n^2 + u_{n+1}^2) + 2u_n u_{n+1} = (u_n + u_{n+1})^2$ où $u_n + u_{n+1} \in \mathbf{N}^*$,

  d'où le résultat demandé.

Remarques :

- Il est facile de déduire aussi que pour tout entier naturel non nul n, $4u_n u_{n+1}+1$ est aussi le carré d'un entier, avec plus précisément $4u_n u_{n+1}+1=\left(u_{n+1}-u_n\right)^2$ et le lemme assure d'autre part qu'en fait pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n$.

- En observant que pour tout entier naturel non nul n, l'équation de degré 2 unitaire à coefficients entiers $x^2-6u_n x+(u_n{}^2-1)=0$, celui de degré 1 étant pair, admet au moins une racine entière (avec u_{n+1}), son discriminant réduit $8u_n{}^2+1$ est nécessairement un carré parfait.

- Grâce à un raisonnement de descente infinie à la Fermat (en inversant le processus à partir d'un couple solution) il est assez facile de prouver que l'ensemble E est en fait exactement l'ensemble $\{(u_n,u_{n+1}) : n\in\mathbf{N}^*\}$.

- Il paraît possible de généraliser pour trouver tous les couples d'entiers naturels (a,b) vérifiant $a^2-tab+b^2=1$ pour t entier fixé au moins égal à 2 (même si ce cas-limite là ne nécessiterait pas autant de complexité !) : il suffit de poser $u_2 = t$ et de garder $u_1=1$ et la même relation $u_{n+1}{}^2-1-u_n u_{n+2}=0$ qui donnera la relation de récurrence $u_{n+2}=tu_{n+1}-u_n$ et le fait que les $(t+2)u_n u_{n+1}+1$, $(t-2)u_n u_{n+1}+1$, $(t^2-4)u_n^2+4$ (voire $\left(\left(\frac{t}{2}\right)^2-1\right)u_n{}^2+1$ si t est pair) soient tous toujours des carrés parfaits (dont les racines sont d'ailleurs toutes régies par la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2, la même que pour la suite u).