1 Énoncé du problème

Définition: Soit $n \geqslant 1$ un nombre entier. On dira qu'une fonction f est gentille si elle est polynomiale de degré n, avec n racines entières et distinctes. Théorème : Il existe des fonctions gentilles de degré 3, dont la dérivée est gentille.

2 Solution

Ce théorème d'existence peut-être immédiatemment approuvé en exhibant $f(x)=(x-2)(x+13)(x-11)$ et $f'(x)=3(x-7^2)$. Mais il me semble plus honnête d'expliquer comment construire toutes les fonctions «gentilles», en résolvant l'équation Diophantienne : $3a^2+b^2=12n^2$. Comme expliqué en annexe, une partie de la courbe représentative d'une fonction f polynomiale de degré 3, qui admet deux extrema locaux, peut être assimilée à un courbe de Lissajous, admettant la représentation paramétrique suivante : $\begin{cases} x(\alpha) = x_C + r.\cos(\alpha) \\ y(\alpha) = y_C + r'.\cos(3\alpha) \end{cases}$; $\alpha \in [0;\pi]$, où C est le centre de symétie de la cubique représentative de f. On peut simplifier le problème en translatant la courbe de manière que $x_C = 0$, ce qui revient à faire disparaitre le terme de degré 2 dans l'expression de la fonction polynomiale de degré 3. Pour obtenir une «gentille» fonction, on cherchera donc à résoudre une équation du type : $x^3 = 3n^2x+q$, où n est un entier naturel. On obtiendra ainsi n et $-n$ comme racines de la dérivée de de la fonction polynomiale $f(x)=x^3-3n^2x-q$. Il nous faut donc chercher q, pour que cette fonction polynomiale admettent trois racines entières distinctes. Si notre équation admet trois racines réelles, l'assimilation de la cubique à une courbe de Lissajous, nous permet d'écrire les racines sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_0 = 2n\cos\dfrac{\alpha}{3} \\ x_1 = 2n\cos\dfrac{\alpha+2\pi}{3} = n\left(-\cos\dfrac{\alpha}{3}+\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{3}\right) \\ x_2 = 2n\cos\dfrac{\alpha-2\pi}{3} = n\left(-\cos\dfrac{\alpha}{3}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{3}\right) \end{cases} \quad ; \quad \text{avec } \cos(\alpha)=\frac{q}{2n^3}$$

En utilisant l'identité $\cos^3(x)=\dfrac{3\cos(x)+\cos(3x)}{4}$, on peut en effet vérifier que : $x_k^3 = 2n^3\left(3\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{3}+\cos\alpha\right)=3n^2x_k+q$.

Il nous faut donc déterminer α tel que x_0, x_1 et x_2 soient entiers, on en déduit que $x_1-x_2=2n\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{3}$ doit aussi être entier. Il faut nous donc trouver des entiers a et b tels que : $3a^2+b^2=12n^2$, pour pouvoir poser $\cos\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{a}{2n}$ et $\sin\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{b}{2n\sqrt{3}}$. Les entiers a et b seront nécessairement de même parité et les 3 racines entières de $f(x)=x^3-3n^2x-q$ seront : $\left\{a\,,\ \dfrac{-a+b}{2}\,,\ \dfrac{-a-b}{2}\right\}$.

On pourra donc poser : $f\,x)=(x-a)\left(x+\dfrac{a+b}{2}\right)\left(x+\dfrac{a-b}{2}\right)=x^3-3n^2x-a(a^2-3n^2)$. On peut remarquer qu'à partir d'une solution (a,b,n) , on en obtient aussitôt deux autres : $\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{3a-b}{2},n\right)$ et $\left(\dfrac{a-b}{2},\dfrac{3a+b}{2},n\right)$ qui fournissent une fonction polynomiale ayant les mêmes racines ou leurs opposées. Attention, dans la recherche des solutions ci-desous, il faudra tenir compte du fait que les solutions les plus évidentes : $(a,b)=(2n,0)$ ou $(a,b)=(n,3n)$ n'aboutissent pas à des racines distinctes. De plus à partir de la solution $f(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ on peut engendrer toute une famille de «gentilles fonctions» :

$$F_{a,x_C,\varepsilon}(x)=a(x+x_C+\varepsilon x_0)(x+x_C+\varepsilon x_1)(x+x_C+\varepsilon x_2)\ ,\ \text{avec } a\in\mathbb{R},\ x_C\in\mathbb{Z} \text{ et } \varepsilon\in\{-1;1\}$$

Je ne sais pas résoudre de manière générale l'équation Diophantienne $3a^2+b^2=12n^2$, mais lalgorithme de droite, permet d'obtenir toutes les solutions. Chacune appartient nécessairement à une famille, engendrée par le procédé indiqué ci-dessus et l'un des générateurs suivants :

- $(a,b,n)\in\{(2,24,7),(11,15,7),(13,9,7)\}$ fournit $f'(x)=3(x^2-7^2)$ et $f(x)=(x-2)(x-11)(x+13)$
- $(a,b,n)\in\{(1,45,13),(22,24,13),(23,21,13)\}$ fournit $f'(x)=3(x^2-13^2)$ et $f(x)=(x-1)(x+23)(x-22)$
- $(a,b,n)\in\{(11,63,19),(26,48,19),(37,15,19)\}$ fournit $f'(x)=3(x^2-19^2)$ et $f(x)=(x-11)(x+37)(x-26)$
- $(a,b,n)\in\{(13,105,31),(46,72,31),(59,33,31)\}$ fournit $f'(x)=3(x^2-31^2)$ et $f(x)=(x-13)(x+59)(x-46)$
- $(a,b,n)\in\{(47,99,37),(26,120,37),(73,21,37)\}$ fournit $f'(x)=3(x^2-37^2)$ et $f(x)=(x-47)(x+26)(x+73)$
- ...etc.

Algorithme de recherche de toutes les solutions pour $n \leqslant 100$

- Déclaration des variables
  - a et n : nombres entiers
  - b : nombre réel
- traitement
  - pour n variant de 7 à 100
    - 0 →a
    - Tant que $a<2n$
      - $a+1$ →a
      - $\sqrt{12n^2-3a^2}\to b$
      - Si b entier différent de $3n$
        - Alors afficher (a,b,n)

2.1 Annexe

Étant donné la fonction polynomiale de degré 3 $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d \end{array}$, appliquons lui la formule de Taylor en $x=-\dfrac{b}{3a}$. il s'agit de l'endroit où la dérivée seconde $f''(x)=6a\,x+2b$ s'annulle et où la dérivée $f'(x)=3a\,x^2+2b\,x+c$ admet son extremum égal à $-\dfrac{b^2-3a\,c}{3a}$.

En posant $\Delta'=b^2-3a\,c$, on peut écrire la formule de Taylor de la façon suivante :

$$f\left(-\frac{b}{3a}+h\right)=f\left(-\frac{b}{3a}\right)-\frac{\Delta'}{3a}h+a\,h^3$$

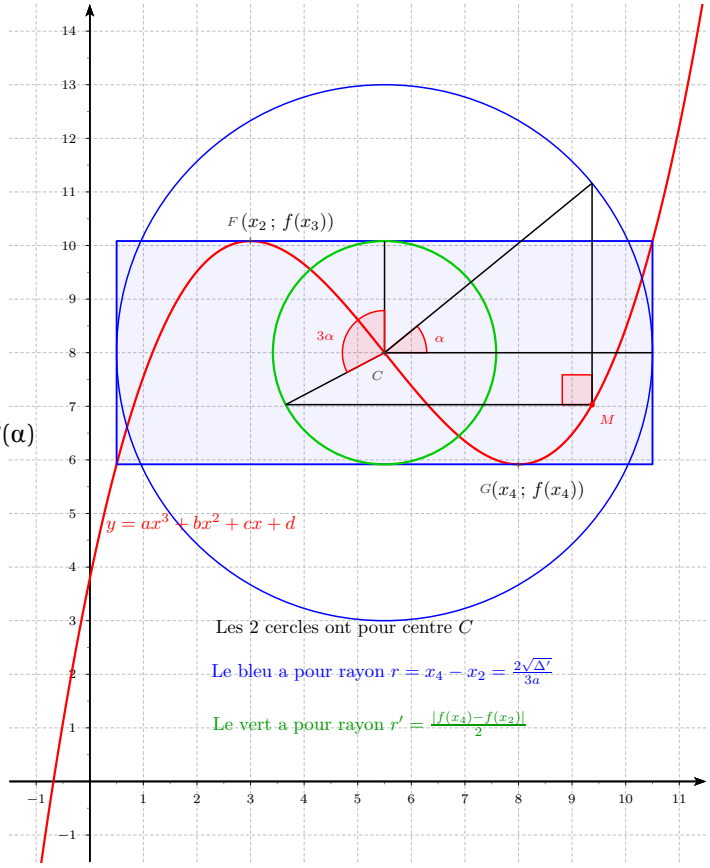
Si on suppose que l'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions distinctes, le discriminant Δ' est donc nécessairement strictement positif, soit alors : $r=\dfrac{2\sqrt{\Delta'}}{3a}$, cela permet d'écrire :

$$f\left(-\frac{b}{3a}+r.\cos(\alpha)\right)=f\left(-\frac{b}{3a}\right)-\frac{2\sqrt{\Delta'}^3}{9a^2}\cos(\alpha)+\frac{8\sqrt{\Delta'}^3}{27a^2}\cos^3(\alpha)$$

En posant : $r'=\dfrac{2\sqrt{\Delta'}^3}{27a^2}$ et en appliquant l'identité : $\cos^3(\alpha)=\dfrac{\cos(3\alpha)+3\cos(\alpha)}{4}$, on obtient :

$$f\left(-\frac{b}{3a}+r.\cos(\alpha)\right)=f\left(-\frac{b}{3a}\right)+r'\left(4.\cos^3(\alpha)-3.\cos(\alpha)\right)$$

$$f\left(-\frac{b}{3a}+r.\cos(\alpha)\right)=f\left(-\frac{b}{3a}\right)+r'.\cos(3\alpha)$$



Lorsqu'une fonction polynomiale de degré 3 admet un maximum et un mininimum local, comme celle représentée par la cubique ci-dessus, la partie comprise dans le rectangle bleu, est donc assimilable à une courbe de Lissajous paramétrée par $\alpha\in[0\,;\,\pi]$. Pour que $f(x)=0$ admette trois solutions réelles distinctes, la cubique doit couper trois fois l'axe des abscisses ; il faut pour cela : $f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\in\left[-r'\,;\,r'\right]$. On peut alors exprimer ces solutions de la façon suivante : [1]

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & \dfrac{-b+2\sqrt{\Delta'}\cos(\alpha)}{3a} \\ x_1 & = & \dfrac{-b+2\sqrt{\Delta'}\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)}{3a} \\ x_2 & = & \dfrac{-b+2\sqrt{\Delta'}\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)}{3a} \end{array}\right. \quad \text{avec } \alpha=\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(-\frac{1}{r'}f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$$

On remarquera que contrairement aux bruits qui courent dans la littérature mathématique, il n'est nul besoin de faire intervenir les nombres complexes pour trouver les trois racines réelles d'une équation du troisième degré ; ils sont bien sur dissimulés derrière l'identité d'Euler : $\cos^n(x)=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ pour $n=3$. On doit tout de même remercier Hieronimo Cardano de ne pas avoir utiliser cette méthode, l'apparition des complexes en aurait peut-être était retardée.

1. Lorsque la fonction $\cos^{-1}$ définie sur $[-1\,;\,1]$ est inutilisable, il faudrait se servir de la fonction sinus hyperbolique sh : $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et de l'identité : $4\,\mathrm{sh}^3(x)=\mathrm{sh}(3x)-3.\mathrm{sh}(x)$. La fonction réciproque sh^{-1} permet d'exprimer l'unique solution par radicaux.