Énoncé du problème

Montrer que $\cos\frac{\pi}{20}+\cos\frac{9\pi}{20}=\frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}$; 2 solutions sont proposées :

- la première suppose connue, la valeur exacte du nombre algébrique de degré 2 $\cos\frac{\pi}{5}$.
- la deuxième utilisera une construction du pentagone régulier, permettant de retrouver une expression par radicaux de $\cos\frac{\pi}{5}$ ou $\cos\frac{2\pi}{5}$, accessible en 1e S.

1e solution

On transforme la somme $\cos\frac{\pi}{20}+\cos\frac{9\pi}{20}$ en produit en utilisant l'identité : $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$$\cos\frac{\pi}{20}+\cos\frac{9\pi}{20}=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{5}$$

On suppose connue : $\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, on en déduit :

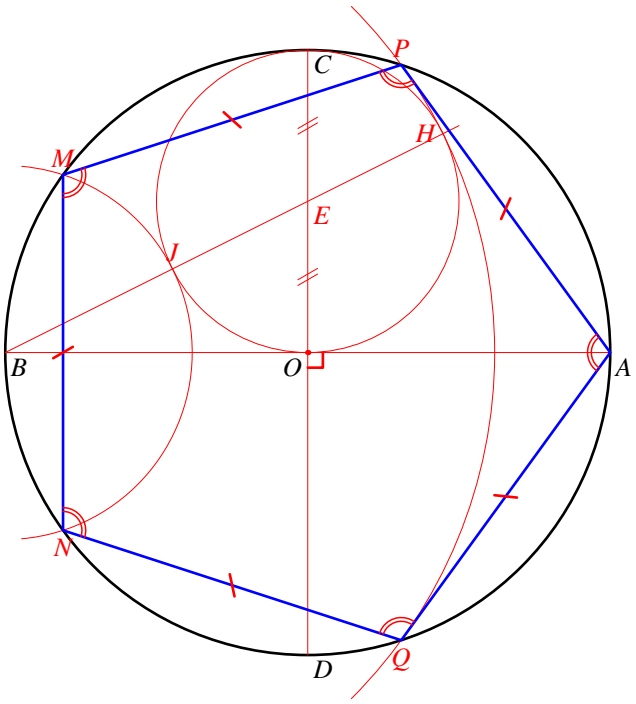
$$\boxed{\cos\frac{\pi}{20}+\cos\frac{9\pi}{20}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}}$$

Le carré de ce nombre positif est : $\frac{12+2\sqrt{20}}{16}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$, on en déduit cette autre égalité :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{20}+\cos\frac{9\pi}{20}=\frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}}$$

2e solution accessible en 1eS

Nous allons montrer que la construction à la règle et au compas ci-dessous, permet de construire un pentagone APMNQ tel que AP = PM = MN = NQ = QA, ce qui nous permettra de calculer la valeur « parachutée» dans la solution 1. On supposera cette figure construite dans un repère orthonormé d'origine O, où A et C ont respectivement pour coordonnées (2;0) et (0;2).



On obtient facilement les distances suivantes : BE = $\sqrt{5}$; BJ = $\sqrt{5}-1$ et BH = $\sqrt{5}+1$. Les arcs de cercles en rouge sont sur 2 cercles de centre B passant l'un par J, l'autre par H, ils ont donc respectivement pour équation :

$$(x+2)^2+y^2=6+2\sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad (x+2)^2+y^2=6-2\sqrt{5}$$

Les coordonnées des 4 points d'intersection de ces deux cercles avec le cercle en noir d'équation $x^2+y^2=4$ vérifient donc les équations :

$$x_M = x_N = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_P = x_Q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

On en déduit :

$$y_M^2 = y_N^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad y_P^2 = y_Q^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

On a donc :

$$PA^2 = QA^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - 2\right)^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{2} = 10 - 2\sqrt{5}$$

$$PM^2 = QN^2 = (x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 = 5 + y_M^2 + y_P^2 - 2y_M y_P$$

Or $y_M^2 + y_P^2 = 5$ et $(y_M y_P)^2 = \dfrac{25-5}{4} = 5$, on en déduit :

$$PM^2 = QN^2 = 10 - 2\sqrt{5}$$

Il reste à vérifier l'égalité de ce résultat avec MN^2, or pour des raisons de symétrie : $MN^2 = (2y_M)^2 = (2y_N)^2 = 10 - 2\sqrt{5}$. On a donc obtenu un pentagone régulier : APMNQ, dans lequel mes $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BP}\right) = \dfrac{1}{2}$ mes $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OP}\right) = \dfrac{\pi}{5}$ Le triangle ABP étant rectangle en P on en déduit le résultat supposé connu dans la solution 1.

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{BP}{BA} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

Cette figure permet aussi d'évaluer $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, et permet cet autre raisonnement. On remarque que $x_2 = \cos\dfrac{\pi}{20}$ et $x_2 = \cos\dfrac{9\pi}{20}$ sont les cosinus de deux angles complémentaires. On a donc $x_1^2 + x_2^2 = 1$ et $2x_1.x_2 = \sin\dfrac{9\pi}{10} = \sin\dfrac{\pi}{10} = \cos\dfrac{2\pi}{5}$. Or dans la construction d'un pentagone régulier ci-dessus on a : $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{x_P}{4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. On déduit que : $(x_1+x_2)^2 = 1 + \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$, x_1 et x_2 étant positifs on en déduit :

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}}$$

On pourrait obtenir une 3e solution, en remarquant que dans la figure ci-dessus, on a : $\cos\dfrac{9\pi}{20} = \dfrac{CP}{4}$ et $\cos\dfrac{\pi}{20} = \dfrac{DP}{4}$.