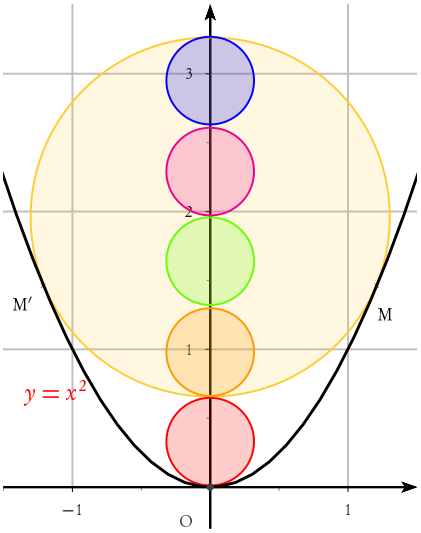
Énoncé du problème

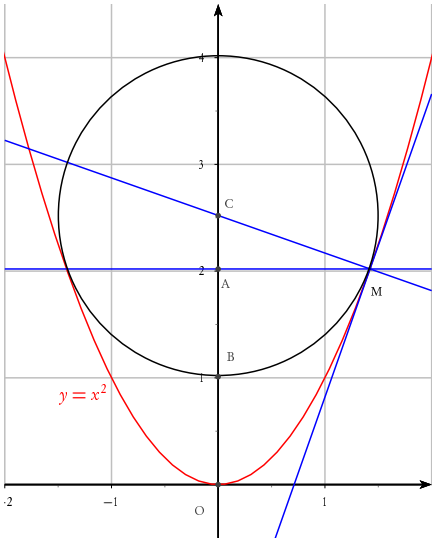
Pour reproduire ce beau sangaku inspiré des travaux de l'IREM de Poitiers (2de et 1reS), il suffit de connaitre le rayon du petit cercle. Calculer ce rayon sachant que l'équation de la parabole est $y = x^2$ dans un repère orthonormé d'unité 1cm.



Ce qu'on voit sur le sangaku fait office de données :

- les cercles sont bien tangents entre eux et leurs centres sont alignés sur l'axe de la parabole ;
- le petit cercle rouge est tangent à la parabole en un seul point ;
- le grand cercle est tangent à la parabole en deux points M et M′ ;
- Les petits cercles ont même rayon.

Solution

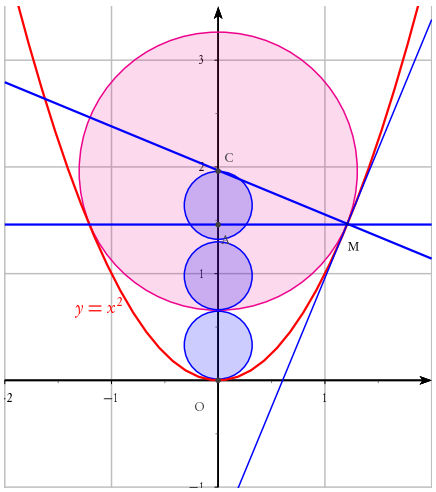


Dans la figure ci-contre, pour construire le cercle centré sur l'axe des ordonnées, et tangent à la parabole d'équation $y = x^2$ en un point M de coordonnées $(x; y)$, on a besoin de construire les droites tangentes et normales en M à cette même parabole. Pour $x \neq 0$, elles ont respectivement pour coefficient directeur $2x$ et $\frac{-1}{2x}$. On a donc :

$$y_M - y_C = x \times \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}$$

La distance AC sur cette figure est donc constamment égale à $\frac{1}{2}$ quelque soit la position de M sur la parabole. Le rayon R du grand cercle vérifie donc :

$$R^2 = CM^2 = AM^2 + AC^2 = OA + \frac{1}{4}$$



Désignons par d le diamètre des 3 petits cercles de la figure ci-contre, on a : $R = 2d$ et $OA = 3d - \frac{1}{2}$, par conséquent :

$$R^2 = \left(3d - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

d vérifie donc l'équation du second degré :

$$4d^2 = 3d - \frac{1}{4}$$

dont les solutions sont : $\frac{3+\sqrt{5}}{8}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$. Mais on ne peut retenir que la première solution. En effet, le cercle centré sur l'axe des ordonnées et tangent à la parabole en deux points distincts, a nécessairement un rayon supérieur à $\frac{1}{2}$ (en dehors du cas où il serait réduit au point O). On doit donc avoir $4d > 1$, seule la première solution vérifie cette inégalité.

Le rayon du petit cercle de notre sangaku est donc : $\frac{3+\sqrt{5}}{16}$