

Énoncé du problème

On considère trois réels strictement positifs tels que : $x^{2010} + y^{2011} + z^{2012} \leq x^{2009} + y^{2010} + z^{2011}$. Montrer que : $x + y + z \leq 3$

Solution

Les millésimes 2009, 2010, 2011 et 2012 ont-ils leur importance ? Nous allons voir que non, en considérant le problème suivant : on se donne n nombre réels $(x_i)_{i \in [1; n]}$ positifs et n nombre entiers naturels $(p_i)_{i \in [1; n]}$, montrons que :

$$\sum_{i=1}^n x_i^{p_i+1} \leq \sum_{i=1}^n x_i^{p_i} \implies \sum_{i=1}^n x_i \leq n$$

Posons $x_i = 1 + \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i \in [-1; +\infty[$, l'inégalité posée comme hypothèse peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (1 + \varepsilon_i)^{p_i} \leq 0$$

On sépare alors les termes pour lesquels ε_i est positif ou négatif de la manière suivante :

$$\sum_{i=1; \varepsilon_i \geq 0}^n \varepsilon_i (1 + \varepsilon_i)^{p_i} \leq \sum_{i=1; \varepsilon_i < 0}^n |\varepsilon_i| (1 + \varepsilon_i)^{p_i}$$

Selon que ε est positif ou négatif, on utilise l'une des 2 inégalités suivantes vérifiée pour tout entier $n \geq 1$:

- $1 \leq 1 + \varepsilon \leq (1 + \varepsilon)^n$, vérifiée pour tout réel $\varepsilon \in [0; +\infty[$ ¹
- $(1 + \varepsilon)^n \leq 1 + \varepsilon \leq 1$, vérifiée tout réel $\varepsilon \in [-1; 0]$.

On obtient successivement :

$$\sum_{i=1; \varepsilon_i \geq 0}^n \varepsilon_i (1 + \varepsilon_i) \leq \sum_{i=1; \varepsilon_i \geq 0}^n \varepsilon_i (1 + \varepsilon_i)^{p_i} \leq \sum_{i=1; \varepsilon_i < 0}^n |\varepsilon_i| (1 + \varepsilon_i)^{p_i} \leq \sum_{i=1; \varepsilon_i < 0}^n |\varepsilon_i| (1 + \varepsilon_i)$$

$$\sum_{i=1; \varepsilon_i \geq 0}^n \varepsilon_i (1 + \varepsilon_i) + \sum_{i=1; \varepsilon_i < 0}^n \varepsilon_i (1 + \varepsilon_i) \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \leq -\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

Le membre de droite de cette inégalité étant évidemment négatif, on en déduit que :

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (1 + \varepsilon_i) = n + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \leq n$$

En appliquant cette inégalité pour $n = 3$, avec $\{x; y; z\} = \{x_1; x_2; x_3\}$ et des exposants p_1, p_2, p_3 pris dans $\{2009; 2010; 2011\}$, on obtient pour tous les réels x, y et z positifs :

$$x^{2010} + y^{2011} + z^{2012} \leq x^{2009} + y^{2010} + z^{2011} \implies x + y + z \leq 3$$

1. On pourrait montrer que $1 + n\varepsilon \leq (1 + \varepsilon)^n$ pour tout entier n et $\varepsilon > -1$, mais ici la minoration plus évidente $1 + \varepsilon \leq (1 + \varepsilon)^n$ pour $\varepsilon \geq 0$ et $n > 0$ nous suffit.