Énoncé du problème

Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice : $2012^{2012} et 2013^{2011}$

Solution

De manière générale comparons $(n+1)^{n-1}$ et n^n en effectuant la soustraction $(n+1)^{n-1} - n^n$. On a successivement :

$$(n+1)^{n-1} - n^n = n^{n-1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} - n\right)$$

$$(n+1)^{n-1} - n^n = n^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{n^k} - n\right)$$

Chacun des n termes de la somme ci-dessus peut être écrit sous la forme suivante :

$$\binom{n-1}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \ldots \times \frac{n-k}{n} \times \frac{1}{k!}$$

Les facteurs de ce produit sont tous positifs inférieurs à 1, car ce sont des rationnels écrits sous forme de ftaction avec dénominateur supérieur au numérateur. Ces n produits sont donc tous inférieurs à 1, et leur somme inférieur à n. La différence $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{n^k} - n$ est donc négative , d"où :

$$\boxed{2012^{2012} > 2013^{2011}}$$