1 Énoncé du problème

Le Duc de Toscane avait repéré, dit la légende, que la probabilité d'obtenir la somme 10 avec 3 dés était supérieure à celle d'obtenir la somme 9. Pour déceler cette différence de l'ordre de 1%, on se dit qu'il devait passer beaucoup de temps à jouer. Mais en y regardant de plus près, lors de 100 parties quelle est la probabilité d'obtenir plus de 10 que de 9 ?

2 Solution

2.1 Rappel sur le problème du Duc de Toscane

On trouve dans les livres scolaires de mathématiques le calcul de la probabilité d'obtenir telle ou telle somme en jouant avec trois dés parfaitement équilibrés. Le lancer de trois dés aboutit à une ensemble Ω contenant $6^3 = 216$ éventualités équiprobables, et pour obtenir une somme égale à 10, il y a en tout 27 éventualités répertoriées dans ce tableau :

6 possibilités pour $1+3+6=10$			6 possibilités pour $1+4+5=10$			3 possibilités pour $2+2+6=10$			6 possibilités pour $2+3+5=10$			3 possibilités pour $2+4+4=10$			3 possibilités pour $3+3+4=10$		
1er dé	2e dé	3e dé	1er dé	2e dé	3e dé	1er dé	2e dé	3e dé	1er dé	2e dé	3e dé	1er dé	2e dé	3e dé	1er dé	2e dé	3e dé
1	3	6	1	4	5	2	2	6	2	3	5	2	4	4	3	3	4
1	6	3	1	5	4	2	6	2	2	5	3	4	2	4	3	4	3
3	1	6	4	1	5	6	2	2	3	2	5	4	4	2	4	3	3
3	6	1	4	5	1				3	5	2						
6	1	3	5	1	4				5	2	3						
6	3	1	5	4	1				5	3	2						

La probabilité d'obtenir une somme 10 est donc $\dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8} = 0,125$

Pour obtenir une somme égale à 9 il y a en tout 25 éventualités répertoriées dans ce tableau :

6 possibilités pour $1+2+6=9$			6 possibilités pour $1+3+5=9$			3 possibilités pour $1+4+4=9$			3 possibilités pour $2+2+5=9$			6 possibilités pour $2+3+4=9$			1 possibilité pour $3+3+3=9$		
1er dé	2e dé	3e dé	1er dé	2e dé	3e dé	1er dé	2e dé	3e dé	1er dé	2e dé	3e dé	1er dé	2e dé	3e dé	1er dé	2e dé	3e dé
1	2	6	1	3	5	1	4	4	2	2	5	2	3	4	3	3	3
1	6	2	1	5	3	4	1	4	2	5	2	2	4	3			
2	1	6	3	1	5	4	4	1	5	2	2	3	2	4			
2	6	1	3	5	1							3	4	2			
6	1	2	5	1	3							4	2	3			
6	2	1	5	3	1							4	3	2			

La probabilité d'obtenir une somme 9 est donc $\dfrac{25}{216}$

Les probabilités d'obtenir une somme 10 ou 9 différent donc de $\dfrac{2}{216} < 1\%$, en faveur de la somme 10. On pourrait doutait que cette différence soit décelable facilement par l'expérience. Mais en y regardant de plus près on se trouve confronté au même «pseudo-paradoxe» du joueur de tennis entrevu avec le problème nº 1 de septembrte 2014 : une faible supériorité pour un joueur concernant le gain d'un point sur un seul enjeu, peut entrainer une probabilité beaucoup plus forte de gagner un jeu qui demande au moins 4 confrontations. Nous allons voir qu'un avantage de moins de 1% pour la somme 10, fait que lors de 100 confrontations, cette somme l'emporte sur la somme 9 avec une probabilité de 53,5 % à 10^{-3} près, il y a égalité avec une probabilité de 8% à 10^{-4} près et la somme 9 l'emporte seulement avec une probabilité de 38,5% à 10^{-3} près. Lors de 300 lancers, ces probabilités deviennent 60%, 4% et 35%, il n'y a donc plus de doute sur la possibilité de déceler cette différence, car l'espérance de gain pour un joueur pariant sur une majorité de somme 10, devient largement plus importante, que celle du joueur pariant sur une majorité de somme 9.

2.2 Calculs des probabilités

Pour modéliser les 100 lancers de 3 dés, considérons l'ensemble $\Omega = [\![3;18]\!]^{[\![1;100]\!]}$ dont les éléments sont des suites de 100 entiers compris entre 3 et 18. La somme obtenue lors du i^e lancer de 3 dés sera désignée par l'entier $\omega(i)$ ou bien ω_i, nous construirons ainsi pour toute expérience ou épreuve une suite $(\omega_n)_{n\in[\![1;100]\!]} \in \Omega$. Nous avons seulement besoin de préciser les probabilités suivantes et d'admettre que les $(\omega_i)_{i\in[\![1;100]\!]}$ sont indépendantes 2 à 2,

- $P(\{\omega_i = 10\}) = \dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8}$
- $P(\{\omega_i = 9\}) = \dfrac{25}{216}$
- $P(\{\omega_i \neq 10\} \cap \{\omega_i \neq 9\}) = \dfrac{164}{216}$

Considérons ensuite les deux variables aléatoires

- $D : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & [\![0;100]\!] \\ \omega & \longmapsto & \operatorname{card}\left(\omega^{-1}(10)\right) \end{array}$
- $N : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & [\![0;100]\!] \\ \omega & \longmapsto & \operatorname{card}\left(\omega^{-1}(9)\right) \end{array}$

qui comptabilisent respectivement le nombre de termes égaux à 10 ou bien 9, parmi les 100 termes de la suite $\omega : [\![1;100]\!] \to [\![3;18]\!]$. Le problème posé consiste à partir de ces hypothèses à calculer $P(D > N)$, nous calculerons aussi $P(D = N)$ et $P(D < N)$ pour mieux évaluer la possibilté de déceler par l'expérience la différence entre $P(\omega_i = 10)$ et $P(\omega_i = 9)$. Si on patitionne l'événement $\{D > N\}$ en 51 événements : $\{D > 50\}$ et les 50 autres parties $\{D = k\} \cap \{N < k\}$ pour k prenant toutes les valeurs entières de 1 à 50, on peut effectuer le calcul suivant :

$$P(D > N) = P(D > 50] + \sum_{k=1}^{50} P(D = k \text{ et } N < k)$$

D et N suivent respectivement les lois binomiales $\left(100, \dfrac{1}{8}\right)$ et $\left(100, \dfrac{25}{216}\right)$; on obtient avec calculatrice ou tableur $P(D > 50] = 1 - F(50) \simeq 1{,}034781 \times 10^{-19}$ à 10^{-25} près, cette probabilité est négligeable, nous verrons qu'il n'est pas significatif de l'inclure dans le calcul final. Nous allons décomposer le calcul de $P(D = k \text{ et } N < k)$ en la somme suivante :

$$P(D = k \text{ et } N < k) = \sum_{l=0}^{k-1} P(D = k \text{ et } N = l)$$

Le triplet $(D, N, 100 - D - N)$ de variables aléatoires non indépendantes suit une loi multinomiale, de paramètres $\left(100, \dfrac{1}{8}, \dfrac{25}{216}, \dfrac{164}{216}\right)$, on a :

$$P\left[(D, 100 - D - N) = (k, l, 100 - k - l\right] = \frac{100!}{k! \times l! \times (100 - k - l)!} \times \frac{27^k \times 25^l \times 164^{100-k-l}}{216^{100}}$$

Le coefficient multinomial $\dfrac{100!}{k! \times l! \times (100 - k - l)!}$ peut aussi être écrit sous la forme $\dbinom{100}{k}\dbinom{100-k}{l}$, qui nous permet le calcul suivant :

$$\sum_{k=1}^{50} P(D = k \text{ et } N < k) = \sum_{k=1}^{50} \left[\binom{100}{k} \frac{27^k \times 189^{100-k}}{216^{100}} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{100-k}{l} \frac{25^l \times 164^{100-k-l}}{189^{100-k}} \right]$$

La somme indicée par l à l'intérieur des crochets ci-dessus [1] est la fonction de répartition d'une loi binomiale de paramètres $\left(100 - k, \dfrac{25}{189}\right)$ appliquée à l'argument $(k-1)$, que l'on peut obtenir dans un tableur ou tabuler dans une liste d'une calculatrice TEXAS [2]. Ces 50 nombres pour k variant de 1 à 50 doivent être multipliés par les termes de 1 à 50, de loi de probabilité binomiale $\mathscr{B}\left(100, \dfrac{27}{216}\right)$ que l'on peut calculer avec un tableur ou une calculatrice, la somme des 50 produits terme à terme de ces deux listes nous donne :

$$\sum_{k=1}^{50} P(D = k \text{ et } N < k) \simeq 0{,}53455756 \text{ à } 10^{-8} \text{ près}$$

Ce Calcul a été effectué sur Calculatrice Texas et confirmé à 10^{-10} près par les tableurs OpenOffice et Excel. Je joins à cette solution le fichier toscane.xls , c'est un tableau de calcul sous open-office qui utilise une autre méthode pour confirmer ces calculs. Pour $n \leqslant 300$ lancers de trois dès, j'ai rempli n lignes et n colonnes avec en ligne l et colonne k, le terme :

$$P(D = k \text{ et } N = l) = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!} \times \frac{27^k \times 25^l \times 164^{n-k-l}}{216^n}$$

de la loi trinomiale de paramètres $\left(n, \dfrac{27}{216}, \dfrac{25}{216}\right)$. Il suffit ensuite de sélectionner les cellules à additionner avec une matrice remplie de 0 ou de 1 en onglet 2 , 3 et 4, pour calculer les trois probabilités $P(D < N)$, $P(D = N)$ et $P(D > N)$. On peut alors constater que le déséquilibre en faveur de la somme 10 devient de plus en plus important et décelable quand n augmente.

1. On peut aussi la retrouver comme probabilité de $\{N < k\}$ sachant $\{D = k\}$.
2. En édition de liste du mode stat on peut utiliser l'instruction : **seq(binomcdf(100-X,25/189,X-1),X,0,50)**. Les calculatrices Casio n'acceptent pas d'imbriquer la fonction de répartition de la loi binomiale, dans une telle instruction qui permet d'inscrire directement 50 nombres dans une liste.