## Énoncé du problème

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel $x$ : $f(f(x))=x^2-2x+2$. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

## Solution

Considérons la fonction $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & f(t+1)-1\end{array}$. On obtient $g\circ g(t)=f\circ f(t+1)-1=(t+1)^2-2(t+1)+2-1=t^2$.

L'identité $g\circ g(t)=t^2$ permet d'exprimer $g\circ g\circ g(x)$ des deux manières suivantes :

$$g(x^2)=[g(x)]^2$$

Cette deuxième identité restreint les valeurs qu'il est possible d'attribuer à $g(0)$, $g(1)$, qui doivent donc vérifier l'équation $x^2=x$. On a donc $g(0)\in\{1;0\}$ ainsi que $g(1)\in\{1;0\}$. On doit aussi avoir $g(-1)^2=g(1)$. Il ne se présente donc plus que 3 cas de figure possibles, pour attribuer une valeur à $f(0)=g(-1)+1$ :

- $g(-1)=0$ lorsque $g(1)=0$
  Dans ce cas on aurait $f(0)=1$
- $g(-1)=-1$ et $g(1)=1$
  Dans ce cas on aurait $f(0)=0$.
  Mais ceci est en contradiction avec $f(f(0)=f(0)=2$, qui découle de l'identité de départ que doit vérifier $f$.
- $g(-1)=1$ et $g(1)=1$
  Dans ce cas on aurait $f(0)=2$

$$\boxed{\text{Les seules valeurs possibles que l'on peut attribuer à } f(0) \text{ sont donc 1 ou 2.}}$$

Mais existe-t-il réellement des fonctions $f$ répondant à tous ces critères ? On doit avoir $g(t^2)=[g(t^2)]$. Cela va nous permettre d'exhiber au moins deux fonctions $f$, vérifiant $f\circ f(x)=x^2-2x+2$ et $f(0)=2$.

Quelque soit le réel $\alpha$, la fonction $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{R}\\ t & \longmapsto & |t|^\alpha\end{array}$ vérifie $g(t^2)=[g(t^2)]$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. On peut donc poser $f(x)=|x-1|^\alpha+1$. On obtient : $f\circ f(x)=\left||x-1|^\alpha\right|^\alpha+1=|x-1|^{\alpha^2}+1$. On doit donc avoir : $|x-1|^{\alpha^2}=(x+1)^2$ pour tout $x$, d'où $\alpha^2=2$. On peut donc poser :

- $f(x)=|x-1|^{\sqrt{2}}+1=\mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln|x-1|}+1$, en effectuant un prolongement par continuité pour obtenir $f(1)=0$
- ou $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|^{\sqrt{2}}}+1$ en convenant que $f(1)=\infty$ et $f(\infty)=1$.

Ces deux cas nous donnent $f(0)=2$.

Figure 1 avec $f(x)=|x-1|^{\sqrt{2}}+1$
illustrant la construction de $f\circ f(x)$

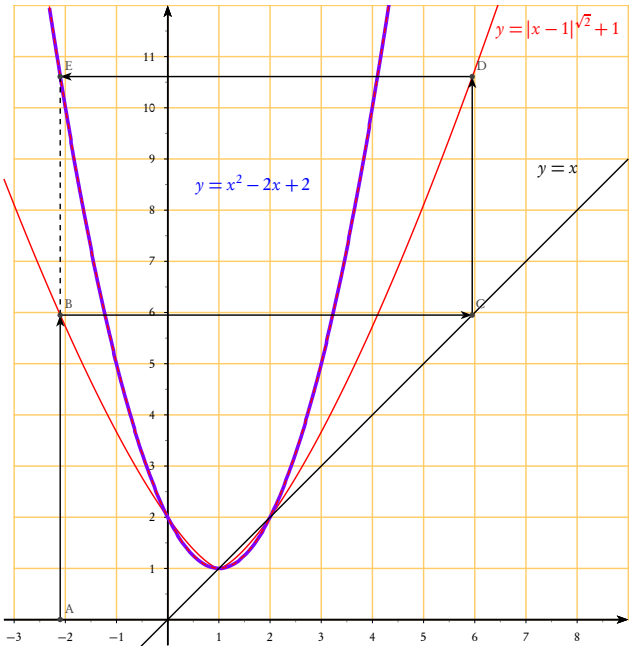


Figure 2 avec $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|^{\sqrt{2}}}+1$
illustrant la construction de $f\circ f(x)$