Énoncé du problème

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 6$ et $u_{n+1}^2 - 1 - u_{n+2}u_n = 0$. Montrer que $8u_n u_{n+1} + 1$ est carré d'un nombre entier.

Solution

On a l'identité suivante, quelque soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$: $\quad 8u_n u_{n+1} + 1 = 2(u_n + u_{n+1})^2 - 2(u_n - u_{n+1})^2 + 1$

En posant $p_n = (u_n + u_{n+1})^2 - 2(u_n - u_{n+1})^2 + 1,$ on obtient : $\quad 8u_n u_{n-1} + 1 = (u_n + u_{n+1})^2 + p_n.$

On peut exprimer p_n de plusieurs autres manières en développant et en tenant compte de $\quad u_{n+1}^2 = 1 + u_{n+2}u_n.$

$$p_n = 6u_n u_{n+1} - u_n^2 - u_{n+1}^2 + 1 = 6u_n u_{n+1} - u_n^2 - u_n u_{n+2} = u_n(6u_{n+1} - u_n - u_{n+2})$$

On a $p_n = 0$ pour $n = 1$ et on montre de plus que la propriété $p_n = 0$ est héréditaire, autrement dit : $\quad p_n = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{n+1} = 0.$
Nous devons nous assurer au préalable que u_n est différent de 0, pour avoir l'implication : $\quad p_n = 0 \quad \Rightarrow \quad 6u_{n+1} - u_n - u_{n+2} = 0.$
Posons pour cela comme hypothèse de récurrence : $u_{n+1} > u_n > 0$ et $p_n = 0$, on peut alors en déduire : $u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$
et $\quad u_{n+2} > 5u_{n+1} > u_{n+1} > 0$. Remplaçons u_{n+2} par $6u_{n+1} - u_n$ dans la première expression qui définit p_{n+1} :

$$p_{n+1} = (u_{n+1} + u_{n+2})^2 - 2(u_{n+1} - u_{n+2})^2 + 1 = (7u_{n+1} - u_n)^2 - 2(u_n - 5u_{n+1})^2 + 1 = 6u_{n+1}u_n - u_n^2 - u_{n+1}^2 + 1 = p_n = 0$$

Compte tenu de $u_1 = 1$ et $u_2 = 6$, on a bien $u_2 > u_1 > 0$ et $p_1 = (1+6)^2 - 2(1-6)^2 + 1 = 0$; on a donc la preuve par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $(u_{n+1} > u_n > 0)$ et $(p_n = 0)$

Donc : $\quad 8u_n u_{n-1} + 1 = (u_n + u_{n+1})^2$ pour tous entier $n \geqslant 1$

Nous avons aussi établi que $u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$. Étant donné que u_1 et u_2 sont entiers, un autre simple raisonnement par récurrence prouve que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ sont entiers ; $8u_n u_{n-1} + 1$ est donc bien le carré d'un nombre entier.

On peut aller un peu plus loin et calculer de manière explicite $\sqrt{8u_n u_{n-1} + 1}$, en fonction de n, à partir de cette nouvelle définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} u_0 = 0 & ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} & = \quad 6u_{n+1} - u_n \end{cases}$ qui donne bien $u_2 = 6$. Une étude classique montre qu'une telle suite est la combinaison linéaire de 2 suites géométriques vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$. Leurs raisons sont nécesssairement les solutions λ et λ^{-1} de l'équation $x^2 = 6x - 1$. À l'aide des conditions initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, on obtient : $u_n = \dfrac{\lambda^n - \lambda^{-n}}{\lambda - \lambda^{-1}}$. on peut d'ailleurs vérifier à posteriori la définition par récurrence de l'énoncé une fois ce résultat établi [1], on en déduit les calculs suivants :

$$u_n u_{n+1} = \frac{\lambda^{2n+1} - \lambda^{-1} - \lambda - \lambda^{-2n-1}}{(\lambda - \lambda^{-1})^2}$$

Les solutions de $x^2 = 6x - 1$ sont $3 \pm \sqrt{8}$, on a donc $\lambda + \lambda^{-1} = 6$ et $(\lambda - \lambda^{-1})^2 = 32$, d'où :

$$8u_n u_{n+1} + 1 = \frac{\lambda^{2n+1} - 2 + \lambda^{-2n-1}}{4} = \left(\frac{\lambda^{n+\frac{1}{2}} - \lambda^{-n-\frac{1}{2}}}{2}\right)^2$$

On remarque que $3 \pm \sqrt{8} = (\sqrt{2} \pm 1)^2$, cela permet d'effectuer les calculs suivants :

$$\sqrt{8u_n u_{n+1} + 1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^{2n+1} - (\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2}$$

$$\sqrt{8u_n u_{n+1} + 1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \sqrt{2}^k \left[1 - (-1)^{2n+1-k}\right]$$

Pour k impair, les termes de cette somme sont nuls. En remplaçant k par $2p$, pour p variant de 0 à n, on obtient finalement :

$$\sqrt{8u_n u_{n+1} + 1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p} 2^p \quad ; \quad \text{on voit de manière évidente qu'il s'agit d'un nombre entier !}$$

1. $\left(\dfrac{\lambda^{n+1} - \lambda^{-n-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}\right)^2 - 1 - \dfrac{\lambda^{n+2} - \lambda^{-n-2}}{\lambda - \lambda^{-1}} \times \dfrac{\lambda^n - \lambda^{-n}}{\lambda - \lambda^{-1}} = \dfrac{(\lambda^{2n+2} - 2 + \lambda^{-2n-2}) - (\lambda^2 - 2 + \lambda^{-2}) - (\lambda^{2n+2} + \lambda^{-2n-2} - \lambda^2 - \lambda^{-2})}{(\lambda - \lambda^{-1})^2} = 0 \quad$ et $\quad u_1 = 1 \,;\, u_2 = \lambda + \lambda^{-1} = 6$