Énoncé du problème

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par u_0 et v_0 réels strictement positifs donnés et : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que $u_{18} + v_{18} > 12$

Solution

Considérons la suite (w_n) telle que $w_n = u_n \times v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite vérifie la relation de récurrence :

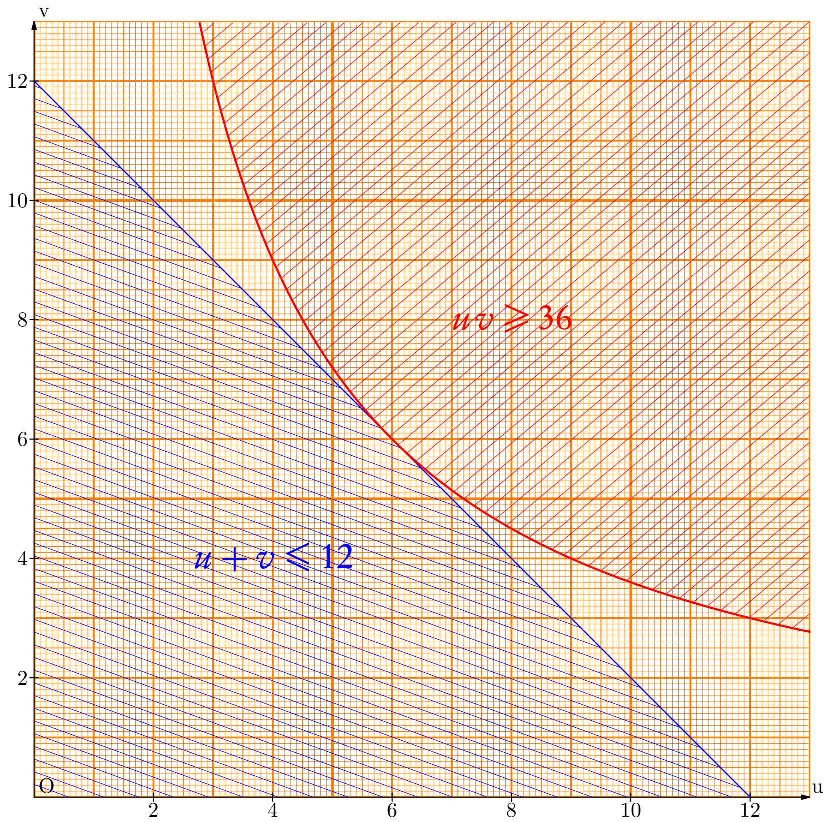
$$w_{n+1} = u_n \times v_n + 2 + \frac{1}{u_n \times v_n} \qquad \Leftrightarrow \qquad w_{n+1} = w_n + \frac{1}{w_n} + 2$$

La fonction $f : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \dfrac{1}{x} \end{array}$ admet le minimum 2 obtenu pour $x = 1$.

Étant donné que u_0 et v_0 sont supposés strictement positifs, on est assuré que $w_0 > 0$ et $w_1 = w_0 + \dfrac{1}{w_0} + 2 \geqslant 4$.
De plus $w_{n+1} > w_n + 2$ permet de démontrer l'inégalité suivante entre terme de rang 1 et 17 : $w_{17} > w_1 + 16 \times 2 > 36$.

Sur le graphique ci contre, on peut observer que dans le plan muni d'un repère cartésien l'ensemble ouvert des points de coordonnées positives (u, v) qui vérifient $v > \dfrac{36}{u}$, est contenu dans le demi-plan ouvert d'équation $u + v > 12$. Cela peut se vérifier en montrant que l'équation $12 - x = \dfrac{36}{x}$, a pour unique solution 6, l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{36}{x}$ est donc tangente à la droite d'équation $y = 12 - x$. On montre facilement ce que le graphique met en évidence : la branche d'hyperbole pour x positif est située au dessus de cette tangente. (u_n) et (v_n) étant de manière évidente des suites croissantes, on est donc assuré que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 17 : u_n + v_n > 12}$$



J'aimerais résoudre la question ; quel est le minimum de $u_{17} + v_{17}$? L'expérience avec tableur me laisse conjecturer que ce minimum est bien supérieur à 12 et est atteint pour $u_0 = v_0 = 1$; avec ces conditions initiales on obtient : $u_{17} = v_{17} \simeq 6,097$ et $u_{17} + v_{17} \simeq 12,194$ à 10^{-3} près.