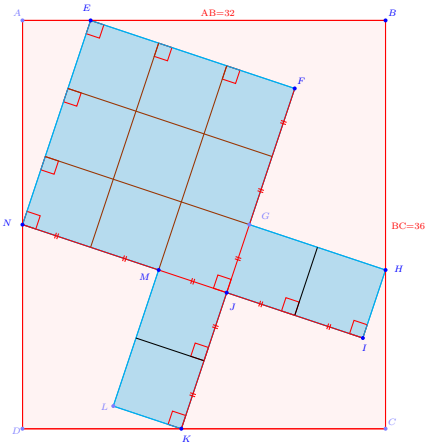
Énoncé du problème

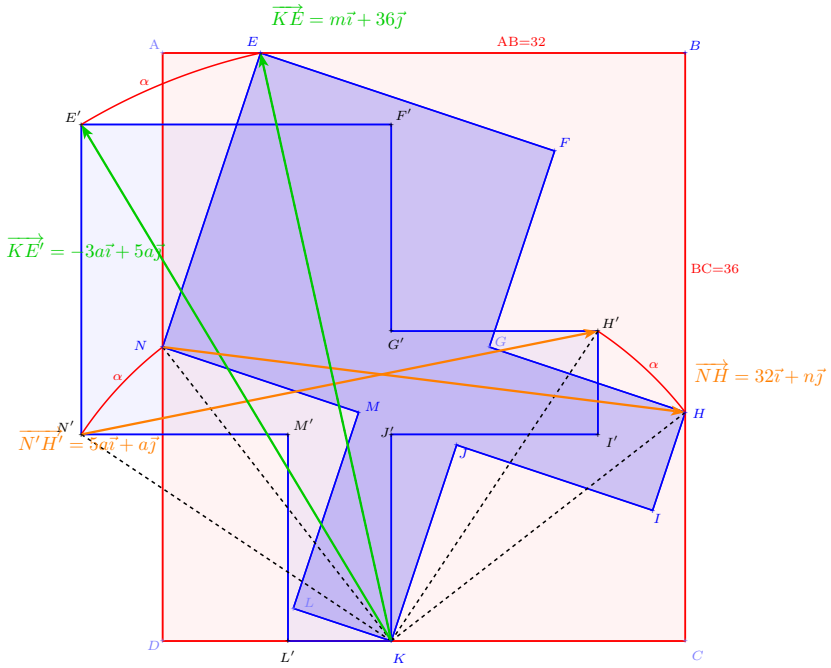
On considère 13 carrés inscrits dans un rectangle ABCD avec AB = 32 et BC = 36. Calculer l'aire d'un carré.



Solution

On considère que le décagone EFGHIJKLMN a été obtenu à partir du décagone E′F′G′H′I′J′K′L′M′N′ représenté ci-dessous par la rotation $\mathscr{R}$ d'angle α autour du centre K. Fixons un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\vec{\imath}$ ait même sens et direction que $\overrightarrow{DC}$. Étant donné que les deux décagones en bleu sont composés de 13 carrés dont les côtés ont pour mesure a, on a :

$$\overrightarrow{N'H'} = 5a\vec{\imath} + a\vec{\jmath} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{KE'} = -3a\vec{\imath} + 5a\vec{\jmath}$$



La matrice de $\mathscr{R}$ égale à $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, permet d'effectuer les calculs suivants :

$$\mathscr{R}\left(\overrightarrow{N'H'}\right) = \overrightarrow{NH} = 32\vec{\imath} + m\vec{\jmath} \qquad \Longrightarrow \qquad 5a \times \cos\alpha - a \times \sin\alpha = 32$$

$$\mathscr{R}\left(\overrightarrow{KE'}\right) = \overrightarrow{KE} = n\vec{\imath} + 36\vec{\jmath} \qquad \Longrightarrow \qquad -3a \times \sin\alpha + 5a \times \cos\alpha = 36$$

La résolution du système à deux inconnues $x = \cos\alpha$ et $y = \sin\alpha$: $\begin{cases} 5ax & - & ay & = & 32 \\ 5ax & - & 3ay & = & 36 \end{cases}$

aboutit à la solution $(x, y) = \left(\dfrac{6}{a}, -\dfrac{2}{a}\right)$, on en déduit $x^2 + y^2 = \dfrac{6^2 + 2^2}{a^2} = 1$.

$$\boxed{\text{l'aire d'un carré de côté } a \text{ est donc } a^2 = 40}$$