

Énoncé du problème

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\text{pour tout réel } x, \text{ on a : } f(8x) + f(18x) = 2f(12x) \text{ et } f(0) = 2014$$

Solution

Étant donné $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, soit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = f\left(\frac{2^n}{3^n}x_0\right)$. En remplaçant x par $\frac{2^n}{8 \times 3^n}x_0$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2^n}{3^n}x_0\right) + f\left(\frac{9 \times 2^n}{4 \times 3^n}x_0\right) &= 2f\left(\frac{3 \times 2^n}{2 \times 3^n}x_0\right) \\ f\left(\frac{2^n}{3^n}x_0\right) + f\left(\frac{2^{n-2}}{3^{n-2}}x_0\right) &= 2f\left(\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}x_0\right) \end{aligned}$$

On obtient donc la relation de récurrence :

$$y_n + y_{n-2} = 2y_{n-1} \Leftrightarrow y_n - y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}$$

On montre immédiatement par récurrence que si $y_0 \neq y_1$, alors $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $y_1 - y_0 \neq 0$. Celle-ci aurait alors pour limite $\pm\infty$, ce qui est en contradiction avec la continuité supposée de f , car nous devrions avoir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2^n}{3^n}x_0\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n}x_0\right) = f(0)$$

On en déduit que $y_0 = y_1$ et que par conséquent $y_0 = y_n$ pour tout n , donc $f(x_0) = f(0)$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

$f \text{ est donc la fonction constante égale à } f(0) = 2014$

Remarquons, que si on n'impose pas à f d'être définie en 0, toute fonction $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k \cdot \ln |a \cdot x| \end{matrix}$, où a et k sont des

constantes réelles, vérifie l'équation fonctionnelle, car :

- $\varphi(8x) + \varphi(18x) = k \cdot \ln(144a^2 \cdot x^2)$,
- $2\varphi(12x) = k \cdot \ln[(12a \cdot x)^2]$

J'ai l'intuition que ce sont les fonctions (continues) sur le plus grand domaine de définition possible, à vérifier cette équation fonctionnelle, je n'ai pas pris le temps de le démontrer et laisse la question ouverte.