Énoncé du problème

Trouver un nombre qui soit divisible par 2014 et dont la somme des chiffres (en écriture décimale) vaille 2014. Peut-on déterminer le plus petit nombre vérifiant les conditions précédentes ?

Solution

Remarquons d'abord qu'un tel nombre est pair et s'écrit nécessairement avec au moins 224 chiffres dans le système décimal ; car avec seulement 223 chiffres, la somme maximale de chiffres que l'on puisse obtenir est $9 \times 223 = 2007$. Nous avons $224 \times 9 = 2016$, un multiple de 2014 que l'on pourrait écrire avec 224 chiffres, ne peut donc avoir que 8 pour chiffre des unités ; tout autre chiffre pair aboutirait à une somme inférieure ou égale à 2013. Le plus petit nombre pair dont la somme des chiffres est 2014, doit donc avoir dans son écriture décimale, 222 chiffres 9 et deux chiffres 8 : $222 \times 9 + 2 \times 8 = 2014$. Pour qu'il soit de plus multiple de 2014, nous allons rechercher la position la plus à gauche possible du deuxième chiffre 8, dans l'écriture de ce nombre, pour tenter de parvenir à la divisibilité souhaitée. Si une telle possibilité nous est offerte, ce nombre serait égal à :

$$\underbrace{999\ldots99}_{\text{223 chiffres 9}}8 - 10^n = 10^{224} - 2 - 10^n \text{ ; où } n \text{ est un entier compris dans l'intervalle } [1\,;\,223]$$

Étant donné la décomposition en facteurs premiers : $2014 = 2 \times 19 \times 53$, on est amené à considérer les résidus modulo 19 et 53 des puissances de 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Résidu modulo 19 de 10^n	10	5	12	6	3	11	15	17	18	9	14	7	13	16	8	4	2	1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Résidu modulo 53 de 10^n	10	47	46	36	42	49	13	24	28	15	44	16	1

On peut donc vérifier les congruences suivantes :

$$\text{dans } \mathbb{Z}/_{19}\mathbb{Z} \quad : \quad 10^{224} \equiv 10^{18\times12+8} \equiv 10^8 \equiv 17 \quad (19) \qquad \text{et dans} \qquad \mathbb{Z}/_{53}\mathbb{Z} \quad : \quad 10^{224} \equiv 10^{13\times17+3} \equiv 10^3 \equiv 46 \quad (53)$$

Pour que $10^{224} - 2 - 10^n$ soit un multiple de 2014, il faudrait que 10^n vérifie les congruences :

$$10^n \equiv 17 - 2 \equiv 15 \quad (19) \qquad \text{et} \qquad 10^n \equiv 46 - 2 \equiv 44 \quad (53)$$

On peut vérifier dans les tableaux de résidus ci-dessus, que 7 est le plus petit entier n tel que $10^n \equiv 15 \quad (19)$; et que 11 est le plus petit entier n tel que $10^n \equiv 44 \quad (53)$. On doit donc déterminer des entiers n, q et q' tels que $7 + 18q = 11 + 13q' = n$ de manière à obtenir :

$$10^n \equiv 10^{7+18q} \equiv 15 \quad (19) \qquad \text{et} \qquad 10^n \equiv 10^{11+13q'} \equiv 44 \quad (53)$$

Pour obtenir $7 + 18q = 11 + 13q'$, il faut que $18q - 13q' = 4$. En utilisant l'agorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de 18 et 11 on obtient successivement : $13 \times 7 - 18 \times 5 = 1$ et $13 \times 28 - 18 \times 20 = 4 = 11 - 7$. Finalement tous les entiers n tels que celui que nous recherchons peuvent s'écrire sous la forme :

$$n = 7 - 18(20 + 13k) = 11 - 13(28 + 18k) \text{ ; avec } k \in \mathbb{Z}$$

Pour obtenir le plus petit nombre possible répondant au problème initial, il faut déterminer le plus grand entier inférieur à 223 que l'on puisse exprimer ainsi, il s'agit de : $115 = 7 + 6 \times 18 = 11 + 8 \times 13$; obtenu avec $k = -2$

$$\text{Récapitulons : } \begin{cases} \text{Dans } \mathbb{Z}/_{19}\mathbb{Z} \quad : \quad 10^{224} \equiv 10^{8+12\times18} \equiv 10^8 \equiv 17 \quad (19) \quad \text{et} \quad 10^{115} \equiv 10^{7+6\times18} \equiv 10^7 \equiv 15 \quad (19) \\ \text{Dans } \mathbb{Z}/_{53}\mathbb{Z} \quad : \quad 10^{224} \equiv 10^{3+17\times13} \equiv 10^3 \equiv 46 \quad (53) \quad \text{et} \quad 10^{115} \equiv 10^{11+8\times13} \equiv 10^{11} \equiv 44 \quad (53) \end{cases}$$

$$\text{Par conséquent : } \begin{cases} \text{Dans } \mathbb{Z}/_{19}\mathbb{Z} \quad : \quad 10^{224} - 2 - 10^{115} \equiv 17 - 2 - 15 \equiv 0 \quad (19) \\ \text{Dans } \mathbb{Z}/_{53}\mathbb{Z} \quad : \quad 10^{224} - 2 - 10^{115} \equiv 46 - 2 - 44 \equiv 0 \quad (53) \end{cases}$$

On en déduit que : $10^{224} - 2 - 10^{115}$ est un nombre pair divisible par 19 et 53, il est donc divisible par le produit des nombres premiers : $2 \times 19 \times 53 = 2014$. Le plus petit multiple de 2014 dont la somme des chiffres est 2014 est donc :

$$\boxed{10^{224} - 10^{115} - 2 = \underbrace{9\ldots\ldots9}_{\text{108 chiffres 9}}\ 8\ \underbrace{9\ldots\ldots9}_{\text{114 chiffres 9}}\ 8}$$