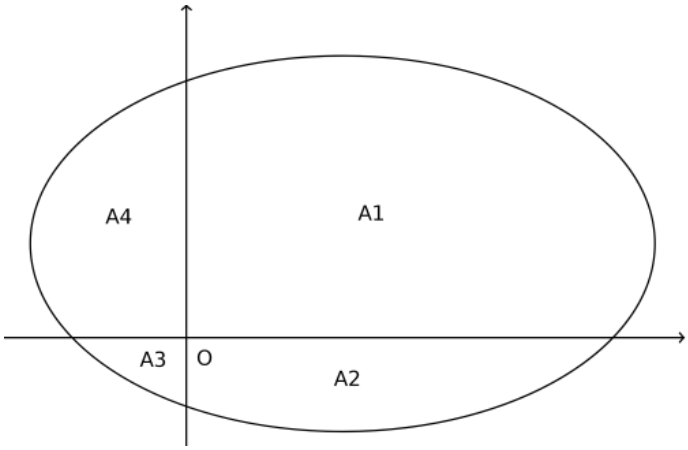
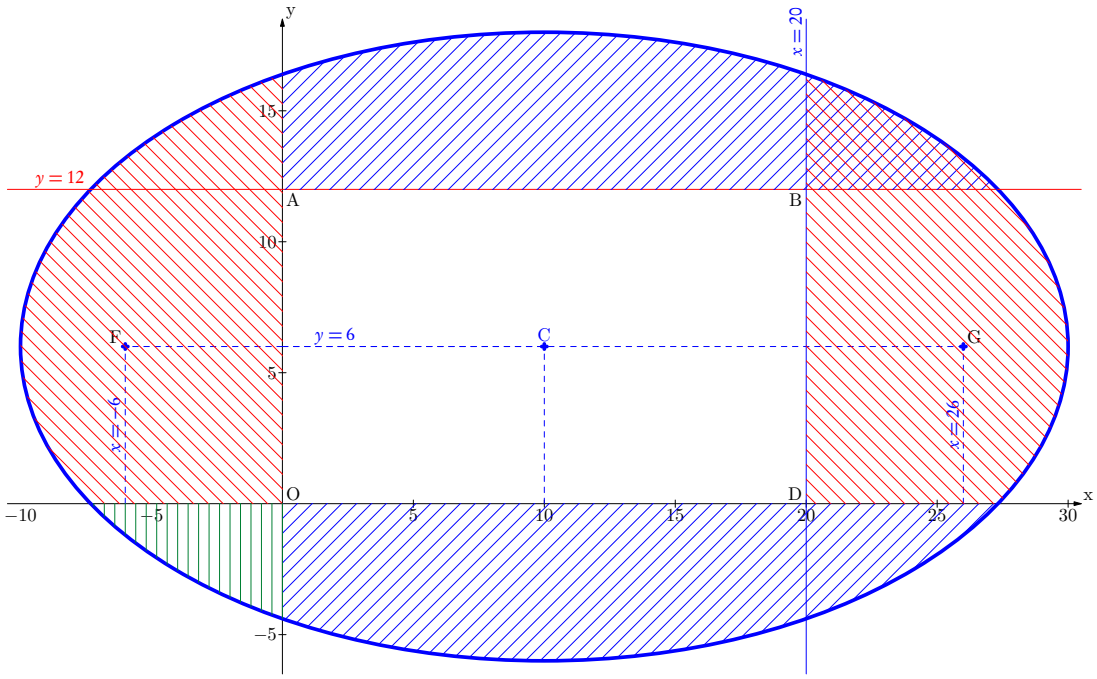
Énoncé du problème

On considère l'ellipse suivante $\dfrac{(x-10)^2}{400}+\dfrac{(y-6)^2}{144}=1$. On nomme les quatre régions délimitées par les axes $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, et $\mathscr{A}_4$ (aires géométriques, voir figure).

Peut-on calculer : $\text{aire}(\mathscr{A}_1)-\text{aire}(\mathscr{A}_2)+\text{aire}(\mathscr{A}_3)-\text{aire}(\mathscr{A}_4)$?



Solution



Cette ellipse a pour centre de symétrie le point C(10 ; 6), si on trace les droites symétriques des axes du repère par rapport à ce centre, on obtient :

- la droite d'équation $y=12$ telle que le domaine intérieur à l'ellipse situé dans le quadrant d'équations $x>0$ et $y>12$ soit le symétrique du domaine $\mathscr{A}_2$, par rapport à la droite d'équation $y=6$, ces domaines symétriques sont hachurés en bleu sur la figure ci-desus.
- la droite d'équation $x=20$ telle que le domaine intérieur à l'ellipse situé dans le quadrant d'équations $x>20$ et $y>0$ soit le symétrique du domaine $\mathscr{A}_4$, par rapport à la droite d'équation $x=10$, ces domaines symétriques sont hachurés en rouge.

Lorsque l'on effectue les opérations : $\text{aire}(\mathscr{A}_1)-\text{aire}(\mathscr{A}_2)-\text{aire}(\mathscr{A}_4)$ On obtient laire du rectangle OABD, auquel on doit encore retrancher l'aire du domaine intérieur à l'ellipse et situé dans le quadrant d'équations : $x>20$ et $y>12$, hachuré en bleu et rouge. Ce domaine et le symétrique par rapport à C du domaine $\mathscr{A}_3$ hachuré en vert. On a donc :

$$\boxed{\text{aire}(\mathscr{A}_1)-\text{aire}(\mathscr{A}_2)+\text{aire}(\mathscr{A}_3)-\text{aire}(\mathscr{A}_4)=\text{aire}(\text{OABD})=12\times 20=240}$$