Corrigé du sujet n° 4

J'appelle r et R respectivement les rayons du petit et du grand cercle.

Je considère $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ une équation paramétrique de la parabole et $A(t_0\ ; t_0^2)$ le point commun du grand cercle et de la tangente à la parabole, avec $t_0 > 0$.

Un vecteur directeur de la tangente à la parabole au point A est $\overrightarrow{u}(1\ ; 2t_0)$, donc un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{v}(-2t_0\ ; 1)$, avec $B(0\ ;\ 6r)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = 0 &\Leftrightarrow t_0 \times 1 + (t_0^2 - 6r) \times 2t_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow t_0^2 = -\frac{1}{2} + 6r \end{aligned}$$

Ce qui implique $r > \dfrac{1}{12}$, car $t_0 > 0$.

J'exprime maintenant le fait que le point A appartient au grand cerle, ce qui me donne :

$\begin{cases} x_0 = t_0 = R\cos\theta_0 = 4r\cos\theta_0 \\ y_0 - 6r = t_0^2 - 6r = R\sin\theta_0 = 4r\sin\theta_0 \end{cases}$

D'où $y_0^2 + (1 - 12r)y_0 + 20r^2 = 0$, cette dernière équation doit avoir une racine double, pour traduire le fait que le grand cercle est tangent à la parabole au point A ,d'où

$\Delta = 64r^2 - 24r + 1 = 0$. La résolution de cette dernière équation donne deux solutions dont une à rejeter en tenant compte de la condition $r > \dfrac{1}{12}$. Il nous reste $r_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{16}$. CQFD