Corrigé du sujet n° 2

Je vais utiliser l'inégalité suivante : $x^{2n} + y^{2m} \geqslant 2x^n y^m$.

$$\begin{aligned}
x^{2010} + y^{2011} + z^{2012} \leqslant x^{2009} + y^{2010} + z^{2011} &\Longrightarrow x^{2010} + y^{2011} + z^{2012} + y^{2009} \leqslant x^{2009} + y^{2010} + z^{2011} + y^{2009} \\
&\Longrightarrow x^{2010} + y^{2010} + z^{2012} \leqslant x^{2009} + y^{2009} + z^{2011} \\
&\Longrightarrow x^{2010} + y^{2010} + z^{2012} + z^{2010} \leqslant x^{2009} + y^{2009} + z^{2011} + z^{2010} \\
&\Longrightarrow x^{2010} + y^{2010} + z^{2011} \leqslant x^{2009} + y^{2009} + z^{2010} \\
&\Longrightarrow x^{2010} + y^{2010} + z^{2011} + z^{2009} \leqslant x^{2009} + y^{2009} + z^{2010} + z^{2009} \\
&\Longrightarrow x^{2010} + y^{2010} + z^{2010} \leqslant x^{2009} + y^{2009} + z^{2009}
\end{aligned}$$

Maintenant, il me reste à montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$
Si j'ai :
$x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1} \leqslant x^n + y^n + z^n$, alors $x^n + y^n + z^n \leqslant x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}$.
Je remarque l'équivalence suivante :
$x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1} \leqslant x^n + y^n + z^n \Leftrightarrow x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1} + x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1} \leqslant x^n + y^n + z^n +$
$x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}$.
Donc $x^n + y^n + z^n \leqslant x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}$
Finalement, j'ai donc :

$$x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1} \leqslant x^n + y^n + z^n \leqslant x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1} \leqslant ... \leqslant 3$$

.