Corrigé du sujet n° 12

On considère la première figure comme une figure à plusieurs étages.
Pour construire le premier, on a besoin de 3 allumettes.
Pour construire le deuxième étage, on a besoin de 9 allumettes.
Pour construire le troisième étage, on a besoin de 18 allumettes.
On compte le nombre d'allumettes horizontales et on trouve $\dfrac{n(n+1)}{2}$. De même on trouve le nombre d'allumettes obliques ; il est : $n(n+1)$.
Pour n étages, on trouve $\dfrac{3n(n+1)}{2}$.
Maintenant il faut compter le nombre d'allumettes dans la figure 2 :
Le nombre d'allumettes nécessaires pour construire un carré de côté m est $2m(m+1)$:
$2m$ correspond au nombre des lignes verticales et $m+1$ à celui des lignes horizontales.

1. A l'aide d'un tableur, on trouve 84 pour $n=7$ et $m=6$.

Pour répondre aux autres questions on doit résoudre l'équation suivante : $\dfrac{3n(n+1)}{2} = 2m(m+1)$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{3n(n+1)}{2} = 2m(m+1) &\iff 3n(n+1) = 4m(m+1)\\
\frac{3n(n+1)}{2} = 2m(m+1) &\iff 3[(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}] = 4[(m+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]\\
\frac{3n(n+1)}{2} = 2m(m+1) &\iff 3(n+\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4} = 4(m+\frac{1}{2})^2-1\\
\frac{3n(n+1)}{2} = 2m(m+1) &\iff 3(n+\frac{1}{2})^2 = 4(m+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\\
\frac{3n(n+1)}{2} = 2m(m+1) &\iff 16(m+\frac{1}{2})^2-12(n+\frac{1}{2})^2 = 1\\
\frac{3n(n+1)}{2} = 2m(m+1) &\iff (4m+2)^2-3(2n+1)^2 = 1
\end{aligned}$$

En posant $x=4m+2$ et $y=2n+1$, on retrouve l'équation de Pell-Fermat : $x^2-3y^2=1 (E)$.
On constate que le couple $(x_1; y_1) = (2; 1)$ est solution de (E). On construit donc une suite de la façon suivante : $x_{p+1} = 2x_p + 3y_p$ et $y_{p+1} = x_p + 2y_p$.
On remarque que si $(x_p; y_p)$ est solution de (E) alors $(x_{p+1}; y_{p+1})$ est aussi solution de (E).
On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3\\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
En diagonalisant la matrice A, les solutions générales de l'équation Pell-Fermat $x^2-3y^2=1$ s'écrivent :
$x_p = \dfrac{(2+\sqrt{3})^p + (2-\sqrt{3})^p}{2}$ et $y_p = \dfrac{(2+\sqrt{3})^p - (2-\sqrt{3})^p}{\sqrt{12}}$ avec $x_1 = 2$ et $y_1 = 1$.
Pour la suite, il faut utiliser un tableur ou un programme pour conclure.