Corrigé du sujet n° 10

C'est un exercice qui m'a intéressé depuis plusieurs années : un sangaku qui date de 1822 trouvé dans la prefecture de Kanagawa. Je l'avais lu dans la revue pour la science, mais la version américaine : `http://magz.elibraries.eu/ul/2495/2003.N10.MathematicalAmerican.pdf` p 33. Il donnait la réponse , mais il fallait trouver la méthode pour y parvenir.

Soient r_i les rayons des sphères bleues, et r, r', R les rayons respectifs des deux sphères marron et la grande sphère. Si on pose $s_i = \dfrac{1}{r_i}$ et $s = \dfrac{1}{r}$, $s' = \dfrac{1}{r'}$ et $S = \dfrac{1}{R}$. J'utilise la formule suivante :

$$n(\sum_{i=1}^{n+2} s_i^2) = (\sum_{i=1}^{n+2} s_i)^2.$$

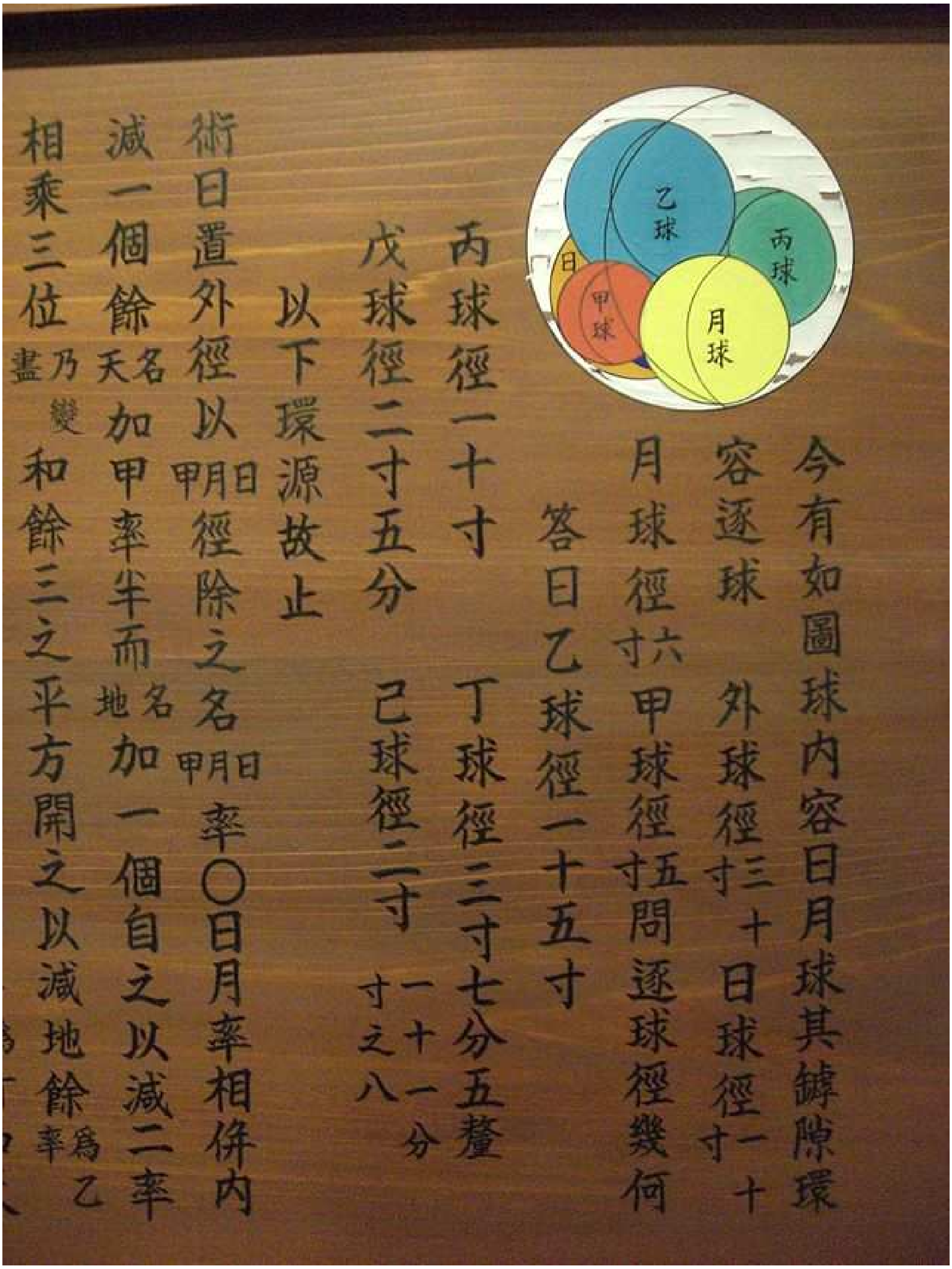
où s_i représente l'inverse des rayons des sphères, et je l'applique à s_1, s_2, s, s' et S.

$$(s_1 + s_2 + s + s' - S)^2 = 3(s_1^2 + s_2^2 + s^2 + s'^2 + S^2) \qquad (E_1)$$

Le signe − devant S vient du fait que la grande sphère est tangente aux autres intérieurement (Voir le lien de wikipidia). En développant la relation E_1 on obtient l'équation du second degré suivante en x :

$$x^2 - x(s_2 + s + s' - S) + (s_2^2 + s^2 + s'^2 + S^2) - s_2 s + s'S - s_2 s' + s_2 S - ss' + sS = 0$$

dont s_1 est racine évidente. En remplaçant s_1 par s_2 et s_2 par s_3 dans la relation E_1, on obtient une deuxième équation du second degré dont s_3 est une racine évidente. On a donc :
$s_1 + s_3 = s_2 + s + s' - S \Leftrightarrow s_3 = s_2 - s_1 + s + s' - S = s_2 - s_1 + S'$ avec $S' = s + s' - S$. De même on obtient les relations suivantes :
$s_4 + s_2 = s_3 + s + s' - S \Leftrightarrow s_4 = s_3 - s_2 + S' = -s_1 + 2S' \Leftrightarrow \dfrac{1}{r_4} + \dfrac{1}{r_1} = 2S'$
$s_5 + s_3 = s_4 + S' \Leftrightarrow s_5 = s_4 - s_3 + S' = -s_2 + 2S' \Leftrightarrow \dfrac{1}{r_5} + \dfrac{1}{r_2} = 2S'$
$s_6 + s_4 = s_5 + S' \Leftrightarrow s_6 = s_5 - s_4 + S' = s_2 - s_1 + S' = -s_3 + 2S' \Leftrightarrow \dfrac{1}{r_6} + \dfrac{1}{r_3} = 2S'$.
Donc la relation à trouver est : $\dfrac{1}{r_4} + \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{r_5} + \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{r_6} + \dfrac{1}{r_3}$.
Remarque : si on suppose l'existence d'une septième sphère, on montre facilement que $s_7 = s_1 \Leftrightarrow r_7 = r_1$, ce qui montre qu'on a exactement six sphères accrochées à notre collier.
`http://en.wikipedia.org/wiki/Descartes27_theorem`
`http://en.wikipedia.org/wiki/Soddy27s_hexlet`


乙球
丙球
日
甲球
月球
今有如圖球内容日月球其餺隙環
容逐球　外球徑三十寸日球徑一十寸
月球徑六寸甲球徑五寸問逐球徑幾何
答曰乙球徑一十五寸
丙球徑一十寸　丁球徑三寸七分五釐
戊球徑二寸五分　己球徑二寸一十一分寸之八
以下環源故止
術曰置外徑以日月甲徑除之名日月甲率〇日月率相併内
減一個餘名天加甲率半而名地加一個自之以減二率
相乘三位盡乃變和餘三之平方開之以減地餘率為乙