Corrigé du sujet n° 8

Si on pose $f(M) = \dfrac{MA+MB}{MC+MD}$, on a donc $f(A) = \dfrac{AB}{AC+AD} = \dfrac{AB}{AB\sqrt{2}+AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$, de même on obtient $f(C) = \dfrac{CA+CB}{CD} = \sqrt{2}+1$. On va montrer que ces deux valeurs représentent effectivement le minimum et le maximum pour f.
On se place dans un repère où les coordonnées des points A, B, C et D sont respectivement $(1\ ;\ 0)$; $(0\ ;\ 1)$; $(-1\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ -1)$. Soit $M(R\cos\alpha\ ;\ R\sin\alpha)$ un point quelconque du plan, avec $R \geqslant 0$.
On a donc

$\dfrac{\sqrt{R^2+1-2R\cos\alpha}+\sqrt{R^2+1-2R\sin\alpha}}{\sqrt{R^2+1+2R\cos\alpha}+\sqrt{R^2+1+2R\sin\alpha}}$. En factorisant par R^2+1, on obtient donc :

$\dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}}$ avec $x = \dfrac{2R\cos\alpha}{R^2+1}$ et $y = \dfrac{2R\sin\alpha}{R^2+1}$. On remarque que :

$x^2+y^2 \leqslant 1$. Maintenant il me reste à encadrer ma nouvelle expression.
En utilisant un paramétrage rationnel du cecle $x^2+y^2=1$, on a :

$x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$ et $y = \dfrac{2z}{1+z^2}$. D'où $\dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}} = \dfrac{|z|\sqrt{2}+|1-z|}{\sqrt{2}+|1+z|} = g(z)$.
On montre que la fonction g est strictement décroissante sur $[-1;0]$, donc on peut affirmer que g atteint son maximum en -1 avec $g(-1) = \sqrt{2}+1$ et son minimum en 0 avec $g(0) = \sqrt{2}-1$. Or elle est constante sur $[0;1]$ avec $g(0) = g(1) = \sqrt{2}-1$. CQFD.