
Corrigé du sujet n° 3

Mon exercice a été donné aux olympiades chinoises, mais je l'ai modifié un peu.

Le lien suivant :

<http://trungtuan.files.wordpress.com/2011/03/btdaytuyentinhcap2.pdf>

répond aux questions posées par quelques collègues.

En calculant les premiers termes, on peut constater que $u_3 = 6u_2 - u_1$, $u_4 = 6u_3 - u_2$, donc on peut montrer facilement par récurrence la relation suivante : $u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$.

Maintenant il me reste à montrer que $8u_n u_{n+1} + 1$ est un carré parfait. Pour cela, on va utiliser la relation précédente et celle de l'énoncé.

$$\begin{aligned}8u_n u_{n+1} + 1 &= 8u_n(6u_n - u_{n-1}) + 1 \\&= 48u_n^2 - 8u_n u_{n-1} + 1 \\&= 49u_n^2 - u_n^2 - 8u_n u_{n-1} + 1 \\&= 49u_n^2 - u_{n+1} u_{n-1} - 1 - 8u_n u_{n-1} + 1 \\&= 49u_n^2 - u_{n-1}(u_{n+1} + 8u_n) \\&= 49u_n^2 - (6u_n - u_{n+1})(u_{n+1} + 8u_n) \\&= (u_{n+1} + u_n)^2\end{aligned}$$

Ce qui répond à la question posée.