Corrigé du sujet n° 17

Pour avoir $u_{18} + v_{18} > 12$, il suffit d'avoir $\sqrt{u_{18}}\sqrt{v_{18}} > 6$, car $u_{18} + v_{18} \geqslant 2\sqrt{u_{18}}\sqrt{v_{18}}$, ce qui conduit à la condition suivante : $u_{18}v_{18} > 36$.
Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n v_n > 2n$.

- *Initialisation.* Pour $n = 0$, c'est évident, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- *Hérédité.* Supposons la propriété vraie au rang n. On a donc $u_n v_n > 2n$.
  Or $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n + 2 + \dfrac{1}{u_n v_n}$, donc $u_{n+1}v_{n+1} > 2(n+1)$, car $\dfrac{1}{u_n v_n} > 0$.
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- *Conclusion.* La propriété est vraie pour tout entier naturel n.

Ce qui achève ma démonstration ! C'est une généralisation de l'exercice proposé.