Corrigé du sujet n° 16

Je pose $A = n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ et je remarque que $663 = 3 \times 13 \times 17$, donc
$A \equiv 0 \pmod{663} \Leftrightarrow A \equiv 0 \pmod 3$, $A \equiv 0 \pmod{13}$ et $A \equiv 0 \pmod{17}$.

- $A \equiv 0 \pmod 3$
  Si $n \equiv 0 \pmod 3$ alors $A \equiv 0 \pmod 3$
  Si $n \equiv 1 \pmod 3$ alors $n^{n^{n^n}} \equiv 1 \pmod 3$ et $n^{n^n} \equiv 1 \pmod 3$, donc $A \equiv 0 \pmod 3$
  Si $n \equiv -1 \pmod 3$ alors $n^n \equiv (-1)^n \pmod 3$, donc j'aurai deux cas à traiter :
  - Si n est pair alors $n^n \equiv 1 \pmod 3$, donc $A \equiv 0 \pmod 3$
  - Si n est impair alors $n^{n^n} \equiv -1 \pmod 3$, et $n^{n^{n^n}} \equiv -1 \pmod 3$ donc $A \equiv 0 \pmod 3$

  Dans tous les cas j'ai : $A \equiv 0 \pmod 3$

- $A \equiv 0 \pmod{13}$
  Je sais que $n^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ d'après le petit théorème de Fermat, or $A = n^{n^n}(n^{(n^{n^n} - n^n)} - 1)$, donc il me reste à montrer que $n^{n^n} - n^n \equiv 0 \pmod{12}$.
  Je viens de montrer que $n^{n^n} - n^n \equiv 0 \pmod 3$, il me reste à prouver que $n^{n^n} - n^n \equiv 0 \pmod 4$.
  Si $n \equiv 0 \pmod 4$ alors $n^{n^n} - n^n \equiv 0 \pmod 4$.
  Si $n \equiv 1 \pmod 4$ alors $n^{n^n} - n^n \equiv 0 \pmod{12}$.
  Si $n \equiv 2 \pmod 4$ alors $n^n \equiv 0 \pmod 4$, car $n \geqslant 3$, donc $n^{n^n} - n^n \equiv 0 \pmod 4$.
  Si $n \equiv -1 \pmod 4$ alors $n^n \equiv (-1)^n \pmod 4$, donc j'aurai deux cas à traiter :
  - Si n est pair alors $n^n \equiv 1 \pmod 4$, donc $n^{n^n} - n^n \equiv 0 \pmod 4$
  - Si n est impair alors $n^n \equiv -1 \pmod 4$, et $n^{n^n} \equiv -1 \pmod 4$ donc $n^{n^n} - n^n \equiv 0 \pmod 4$.
    D'où pour tout $n \geqslant 3$, $n^{n^n} - n^n \equiv 0 \pmod{12}$.
    $n^{(n^{n^n} - n^n)} - 1 = n^{12k} - 1 \equiv 0 \pmod{13}$, avec $k \in \mathbb{N}$. Donc $A \equiv 0 \pmod{13}$

- $A \equiv 0 \pmod{17}$
  Si n est pair alors $n = 2k$ avec $k \geqslant 2$, donc $n^n = (2k)^{2k} = 4^k \times k^{2k} \equiv 0 \pmod{16}$, donc
  $n^{n^n} - n^n \equiv 0 \pmod{16}$, ce qui montre que $A \equiv 0 \pmod{17}$ en utilisant la même démarche que précédemment(le petit théorème de Fermat).
  Si n est impair alors $n = 2k+1$ avec $k \geqslant 1$, donc $n^n \equiv n \pmod 4$, car $(2k+1)^{2k+1} = (4k^2+4k+1)^k(2k+1)$, donc $n^{n^n - n} = n^{4h} \equiv 1 \pmod{16}$ avec $h \in \mathbb{N}$ et en utilisant l'écriture suivante de
  $A = n^{n^n}(n^{n^{n(n^{n^n} - n - 1)}} - 1)$, la démonstration se termine de la même façon.
  Conclusion : pour tout $n \geqslant 3$ on a : $663 / n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$