Corrigé du sujet n° 14

Je commence par démontrer l'inégalité suivante :

$$(AB+CD)^2+(BC+DA)^2 \geqslant 2(AC^2+BD^2)$$

J'ai donc :
$AB+CD = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{CD}\| \geqslant \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\|$ (inégalité triangulaire)
$BC+DA = \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{DA}\| \geqslant \|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA}\|$
D'où les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(AB+CD)^2+(BC+DA)^2 &\geqslant \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\|^2 + \|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA}\|^2 \\ &\geqslant AB^2+CD^2+BC^2+DA^2-2(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}) \\ &\geqslant \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2+\|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\|^2-2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) \\ &\geqslant \|\overrightarrow{AC}\|^2+\|\overrightarrow{CA}\|^2-2\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BD} \\ &\geqslant 2(AC^2+BD^2)\end{aligned}$$

Je remarque que les données de l'énoncé me permettent d'avoir l'égalité dans l'inégalité précédente.
Ce qui revient à avoir l'égalité dans l'inégalité triangulaire. Or je sais que cette dernière condition me permet de dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DA}$.
Je peux donc poser $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC} = \beta\overrightarrow{DA}$.
Or

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0} &\iff (1+\alpha)\overrightarrow{CD}+(1+\beta)\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0} \\ &\iff \alpha=-1 \text{ et } \beta=-1,\end{aligned}$$

Car les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DA}$ forment une base. Je viens de montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
Je remarque que les carrés vérifient bien les deux relations de l'énoncé.