
Corrigé du sujet n° 10

En posant $y = 12x$, on a les équivalences suivantes pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(8x) + f(18x) = 2f(12x) &\Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}y\right) + f\left(\frac{3}{2}y\right) = 2f(y) \\ &\Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}y\right) - f(y) = f(y) - f\left(\frac{3}{2}y\right) \end{aligned}$$

On remarque si on pose $g(y) = f(y) - f\left(\frac{3}{2}y\right)$ (1), on a donc $g(y) = g\left(\frac{2}{3}y\right)$ (2) pour tout $y \in \mathbb{R}$.

De la relation (2) on tire $g(y) = g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n y\right)$ (3) pour tout $y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation (3) et en utilisant la continuité de g , on obtient $g(y) = g(0) = 0$.

La relation (1) nous permet d'écrire $f\left(\frac{2}{3}y\right) = f(y)$, puis $f(y) = f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n y\right)$ (4).

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation (4), on obtient $f(y) = f(0) = 2014$.

La seule fonction continue qui vérifie les conditions de l'énoncé est la fonction constante (=2014)