Lorsque Roger Federer est au service, il a 72 % de chances de gagner le point. Quelle est la probabilité qu'il gagne le jeu (non décisif) ?

Proposition de solution

On note $\mathscr{F}$ l'évènement « Federer gagne le jeu », puis $\mathscr{F}_i$ l'évènement réalisé lorsque l'adversaire marque i points ($0 \leq i \leq 2$) et $\mathscr{F}_a$ désigne l'évènement réalisé lorsque Federer gagne aux avantages. On note $\alpha = 0.72$.
Il est clair que

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_0 \sqcup \mathscr{F}_1 \sqcup \mathscr{F}_2 \sqcup \mathscr{F}_a.$$

En notant que le gain des points sont indépendants les uns des autres, on a

$$P(\mathscr{F}_0) = \alpha^4,\ P(\mathscr{F}_1) = \binom{4}{1}\alpha^4(1-\alpha) + \binom{5}{2}\alpha^4(1-\alpha)^2 + \binom{6}{3}\alpha^3(1-\alpha)^3 \cdot p,$$

où on peut écrire

$$p := \sum_{n \geq 0} p_{2n}\alpha^2$$

Le réel p_{2n} est ici la probabilité pour qu'à l'issue d'une suite de $2n$ épreuves de Bernoulli (avec proba(succès)=α) la différence entre nombre de succès et le nombre d'échecs est inférieur ou égal à 1 (en valeur absolue). Il est clair que $p_{2n+2} = p_{2n}2\alpha(1-\alpha)$ et donc que $p_{2n} = \big(2\alpha(1-\alpha)\big)^n$. Ainsi

$$p = \alpha^2 \sum_{n \geq 0} p_{2n} = \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha(1-\alpha)}.$$

On trouve que la probabilité pour que Roger Federer gagne le jeu est de 0.92276.