Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine n°11

On note d la fonction arithmétique qui compte le nombre de diviseurs d'un entier naturel non nul. On a alors d(n) $\geq$ 2, d(1) = 1 Si un entier non nul n se décompose en facteurs premiers sous la forme $p_1^{a_1} \times \ldots \times p_r^{a_r}$ avec $p_1 < \ldots < p_r$ et $a_1, \ldots, a_r$ des entiers naturels non nuls alors on sait que d(n) = $(a_1 + 1) \times \ldots \times (a_r + 1)$.

On cherche les solutions entières et positives de $d(n)^2 - d(n) = n$ (1)

<u>Quelques remarques préliminaires</u>

Il est clair que $n = 1$ n'est pas solution de (1).

Si une solution n de (1) est de la forme p^N avec p nombre premier et N entier naturel non nul alors (1) s'écrit $(N+1)N = p^N$. Comme (N + 1) et N sont premiers entre eux on a $N + 1 = p^N$ et N = 1, d'où $n = 2$.

Si une solution n de (1) est de la forme $p_1 \times \ldots \times p_r$ alors l'équation (1) s'écrit $2^r \times (2^r - 1) = p_1 \times \ldots \times p_r$, d'où $p_1 = 2^r = 2$ et donc $p_2 \times \ldots \times p_r = 1$, n ne peut valoir encore que 2.

L'équation (1) peut se factoriser : $d(n)\,[d(n) - 1] = n$. Comme d(n) et d(n) – 1 sont deux entiers consécutifs, l'un des deux est pair et donc tout entier n solution de (1) est pair et par conséquent $p_1 = 2$.

On peut écrire alors que si n est une solution de (1) différente de 2 on a

$$\frac{d(n)}{\sqrt{n}} = \prod_{i=1}^{r} \frac{a_i+1}{p_i^{0,5a_i}} \ (2) \text{ avec } p_1 = 2,\ r \geq 2, \text{ et } \prod_{i=1}^{r} a_i > 1.$$

On note $f_p(N) = \frac{N+1}{p^{0,5N}}$ où p désigne un nombre premier et N un entier naturel non nul. La suite $(f_p(N))_{N\geq 1}$ est une suite décroissante pour tout $p \geq 3$ car $\frac{N+1}{p^{0,5N}} > \frac{N+2}{p^{0,5(N+1)}}$ équivaut à $p^{0,5} > 1 + \frac{1}{N+1}$ et $p^{0,5} \geq 3^{0,5} > 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{N+1}$. Ce qui permet de dire que pour tout nombre premier $p \geq 3$ et pour tout entier $N \geq 1$ on a $\frac{2}{\sqrt{p}} \geq f_p(N)$.

On montre de même que $(f_2(N))_{N\geq 2}$ est une suite décroissante et comme $f_2(2) = 3/2 > f_2(1) = \sqrt{2}$ on a que $3/2 \geq f_2(N)$ pour tout entier $N \geq 1$.

On va maintenant majorer l'expression (2) où n désigne une solution de (1) dans un certain nombre de cas.

Si $p_2 \geq 11$ on a $\frac{d(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{2}\prod_{i=2}^{r} \frac{2}{p_i^{0,5}} \leq \frac{3}{2} \times \frac{2}{11^{0,5}} < 1$ car $1 > \frac{2}{11^{0,5}} \geq \frac{2}{p_2^{0,5}} > \ldots > \frac{2}{p_r^{0,5}} > 0$ et donc $\prod_{i=2}^{r} \frac{2}{p_i^{0,5}} \leq \frac{2}{11^{0,5}}$. Par conséquent $0 < d(n)^2 - d(n) < d(n)^2 < n$. L'équation (1) n'a alors pas de solution.

Si $p_2 = 3$ et $p_3 \geq 13$ on montre de même que l'équation (1) n'a pas de solution car $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3^{0,5}} \times \frac{2}{13^{0,5}} < 1$.

Si $p_2 = 5$ et $p_3 \geq 11$, l'équation (1) n'a pas de solution car $\frac{3}{2} \times \frac{2}{5^{0,5}} \times \frac{2}{11^{0,5}} < 1$.

Si $p_2 = 7$ et $p_3 \geq 11$, l'équation (1) n'a pas de solution car $\frac{3}{2} \times \frac{2}{7^{0,5}} \times \frac{2}{11^{0,5}} < 1$.

Si $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ et $p_4 \geq 11$, l'équation (1) n'a pas de solution car $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3^{0,5}} \times \frac{2}{5^{0,5}} \times \frac{2}{11^{0,5}} < 1$.

Si $p_2 = 3$, $p_3 = 7$ et $p_4 \geq 11$, l'équation (1) n'a pas de solution car $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3^{0,5}} \times \frac{2}{7^{0,5}} \times \frac{2}{11^{0,5}} < 1$.

Si $p_2 = 3$, $p_3 = 11$ et $p_4 \geq 13$, l'équation (1) n'a pas de solution car $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3^{0,5}} \times \frac{2}{11^{0,5}} \times \frac{2}{13^{0,5}} < 1$.

Si $p_2 = 5$, $p_3 = 7$ et $p_4 \geq 11$, l'équation (1) n'a pas de solution car $\frac{3}{2} \times \frac{2}{5^{0,5}} \times \frac{2}{7^{0,5}} \times \frac{2}{11^{0,5}} < 1$.

Si $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ et $p_5 \geq 11$, l'équation (1) n'a pas de solution car $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3^{0,5}} \times \frac{2}{5^{0,5}} \times \frac{2}{7^{0,5}} \times \frac{2}{11^{0,5}} < 1$.

Les solution de (1) sont donc à chercher parmi les entiers de la forme $2^N \times 3^M$, $2^N \times 5^M$, $2^N \times 7^M$, $2^N \times 3^M \times 5^R$, $2^N \times 3^M \times 7^R$, $2^N \times 3^M \times 11^R$, $2^N \times 5^M \times 7^R$, $2^N \times 3^M \times 5^R \times 7^S$ avec N, M, R et S des entiers naturels non nuls.

Pour les solutions de la forme $2^N \times 3^M$, les entiers N et M doivent vérifier $\frac{N+1}{2^{0,5N}} \times \frac{M+1}{3^{0,5M}} > 1$. Les couples (N,M) admissibles sont : (1,2) ; (1,3) ; (2,1) ; (2,2) ; (2,3) ; (3,1) ; (3,2) ; (3,3) ; (4,1) ; (4,2) ; (5,1) ; (5,2) ; (6,1). On vérifie alors qu'aucun ne convient pour l'équation (1).

On procède de même pour les solutions de la forme $2^N \times 5^M$. Les couples (N,M) admissibles sont : (2,1) ; (3,1) ; (4,1). On vérifie alors qu'aucun ne convient pour l'équation (1).

Pour les solutions de la forme $2^N \times 7^M$, les couples (N,M) admissibles sont : (2,1) ; (3,1). Seul (3,1) convient. On trouve alors $n = 2^3 \times 7^1 = 56$ comme solution à (1).

Pour les solutions de la forme $2^N \times 3^M \times 5^R$, les triplets (N,M,R) admissibles sont : (2,1,1) ; (2,1,2) ; (2,2,1) ; (2,3,1) ; (3,1,1) ; (3,2,1) ; (4,1,1) ; (4,2,1) ; (5,1,1). On vérifie alors qu'aucun ne convient pour l'équation (1).

Pour les solutions de la forme $2^N \times 3^M \times 7^R$, les triplets (N,M,R) admissibles sont : (1,2,1) ; (2,1,1) ; (2,2,1) (3,1,1) ; (3,2,1) ; (4,1,1). On vérifie alors qu'aucun ne convient pour l'équation (1).

Pour les solutions de la forme $2^N \times 3^M \times 11^R$, le seul triplet (N,M,R) admissible est : (2,1,1). On trouve alors $n = 2^2 \times 3^1 \times 11^1 = 132$ comme solution à (1).

Pour les solutions de la forme $2^N \times 5^M \times 7^R$, le seul triplet (N,M,R) admissible est : (2,1,1) mais il ne convient pas pour l'équation (1).

Pour les solutions de la forme $2^N \times 3^M \times 5^R \times 7^S$, les quadruplets (N,M,R,S) admissibles sont : (2,1,1,1) ; (2,2,1,1) ; (3,1,1,1). Seul (2,2,1,1) convient et on trouve alors $n = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$ comme solution de l'équation (1).

En définitive l'équation (1) admet 4 solutions, à savoir 2, 56, 132 et 1260.