Solution au problème de la quinzaine numéro 2 proposée par Frédéric de Ligt

On va plutôt établir la propriété proposée sous sa forme contraposée.
Soit donc trois réels strictement positifs x, y et z
si $x + y + z > 3$ alors $x^{2009} + y^{2010} + z^{2011} < x^{2010} + y^{2011} + z^{2012}$ (1)
la seconde inégalité est encore équivalente à : $0 < (x - 1)x^{2009} + (y - 1)y^{2010} + (z – 1)z^{2011}$ (2)
On pose $X = x - 1$, $Y = y – 1$ et $Z = z – 1$, la propriété à établir devient alors :
Soit X, Y et Z trois réels strictement supérieurs à -1
si $X + Y + Z > 0$ alors $0 < X(X + 1)^{2009} + Y(Y+ 1)^{2010} + Z(Z + 1)^{2011}$ (3)
Trois cas peuvent se présenter.
Premier cas. Si X, Y et Z sont positifs (l'un au moins des trois nombres est alors strictement positif puisque leur somme est strictement positive), l'inégalité (3) est évidente.
Second cas. Si l'un des trois nombres est strictement compris entre -1 et 0 et les deux autres sont positifs (l'un de ces deux nombres est nécessairement strictement positif puisque la somme des trois est strictement positive). On choisit X strictement compris entre -1 et 0. Il faut donc comparer
$(-X)(X + 1)^{2009}$ et $Y(Y+ 1)^{2010} + Z(Z + 1)^{2011}$. On a les inégalités suivantes qui permettent de conclure :
$(-X)(X + 1)^{2009} <(-X)(X + 1) < Y(1 + 2010Y) + Z(1 + 2011Z) < Y(Y+ 1)^{2010} + Z(Z + 1)^{2011}$ car
$-X < Y + Z$ et $-X^2 < 2010Y^2 + 2011Z^2$.
On aurait pu choisir Y ou Z à la place de X, le raisonnement aurait été semblable.
Troisième cas. Deux des trois nombres sont strictement compris entre -1 et 0, le troisième nombre étant alors strictement positif. On choisit X et Y compris strictement entre -1 et 0. Il faut donc comparer $(-X)(X + 1)^{2009} + (-Y)(Y+ 1)^{2010}$ et $Z(Z + 1)^{2011}$. On a les inégalités suivantes qui permettent de conclure :
$(-X)(X + 1)^{2009} + (-Y)(Y+ 1)^{2010} < (-X)(X + 1) + (-Y)(Y + 1) < Z(1 + 2011Z) < Z(Z + 1)^{2011}$ car
$-X -Y < Z$ et $-X^2 – Y^2 < 2011Z^2$.
On aurait pu choisir un autre couple que X et Y, le raisonnement aurait été semblable.