Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 17

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de jets nécessaires pour obtenir les 6 faces du dé. On note maintenant x_i , pour i entier variant de 1 à 6, la variable aléatoire qui comptent le nombre de jets nécessaires pour obtenir une $i^{\text{ème}}$ face après avoir déjà obtenu $i - 1$ faces et p_i la probabilité d'obtenir une nouvelle face en ayant déjà obtenu $i - 1$ faces.

On a : $p_i = \dfrac{6-(i-1)}{6}$

La variable aléatoire x_i suit une loi géométrique de paramètre p_i , on sait que son espérance vaut :

$$\frac{1}{p_i}$$

Puisque $X = \sum_{i=1}^{6} x_i$, par linéarité de l'espérance on a :

$$\mathrm{E(X)} = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right) = \sum_{i=1}^{6} \mathrm{E}(x_i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{p_i} = 6\left(\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i}\right) = 14,7$$

Il faut donc en moyenne 14,7 lancers pour sortir au moins une fois chacune des six faces.

On reconnait ici un cas particulier du célèbre problème des vignettes où il s'agit d'estimer le nombre de sachets de vignettes à acheter pour compléter un album de vignettes.