Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine n°15

Quelques notations supplémentaires : F étant une extrémité du pli, on note G l'autre extrémité de ce pli. Dans le triangle CBG rectangle en B, CB = x, BG = y et CG = z.

Sans perte de généralité on peut supposer que le côté du carré initial ABCD vaut 1.

Le théorème de Pythagore dans le triangle CBG : $z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) = x^2$; avec $z + y = 1$ on obtient $y = (1 - x^2)/2$ et $z = (1 + x^2)/2$.

Les triangles CBG et AEC sont semblables, par conséquent $y/z = (1 - x)/a$. On tire de l'égalité de ces rapports l'expression de a en fonction de x c'est-à dire de la position du point C sur le bord [AB] de la feuille : $a = (1 + x^2)/(1 + x)$. Par ailleurs $b = 1 - a = (x - x^2)/(1 + x)$.

Le rapport a/b peut donc s'exprimer en fonction uniquement de x : $a/b = (1 + x^2)/(x - x^2)$.

On va étudier les variations sur]0 ; 1[de la fonction f définie par $f(x) = (1 + x^2)/(x - x^2)$.

$f'(x) = (x^2 + 2x - 1)/(x - x^2)^2$. Après l'étude du signe du trinôme $x^2 + 2x - 1$, on peut dire que sur $]0 ; \sqrt{2} - 1[$, $f'(x) < 0$; sur $]\sqrt{2} - 1 ; 1[$, $f'(x) > 0$ et $f'(\sqrt{2} - 1) = 0$.

En définitive $a/b \geq f(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} + 2$. Les triangles CBG et ACE sont alors isocèles rectangles.