Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine n°13

Enoncé : On considère le triangle ABC tel que $cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$. Montrer que $\max(\alpha,\beta,\gamma) > \frac{5\pi}{6}$.

Solution :

On va montrer un résultat légèrement plus fort avec $\frac{9\pi}{10}$ comme minorant au lieu de $\frac{5\pi}{6}$.

On a les égalités suivantes, valables dans le cas où α,β,γ désignent les angles d'un triangle :

$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2}cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) + cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}sin\alpha + \frac{1}{2}cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$$

L'encadrement $0 \leq \left|\frac{\beta-\gamma}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ entraîne l'encadrement suivant : $cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) < cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \leq 1$.

D'où la minoration:

$$\frac{1}{4}sin\alpha + \frac{1}{2}cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) < cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Ou encore :

$$\frac{1}{2}sin\alpha = \frac{1}{4}sin\alpha + \frac{1}{4}sin\alpha < cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Dans un triangle le plus grand des trois angles a toujours une mesure supérieure ou égale à $\frac{\pi}{3}$ rad (sinon la somme des trois angles serait strictement inférieure à π rad). Notons α cet angle.

Si $\alpha \in [\frac{\pi}{3},\frac{9\pi}{10}]$ on a que $sin\alpha \geq sin\frac{9\pi}{10}$ et donc que $cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) > \frac{1}{2}sin\frac{9\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$.

Par conséquent $\alpha > \frac{9\pi}{10} > \frac{5\pi}{6}$.