Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine n°10

Il s'agit d'un théorème assez classique démontré par Frederick Soddy en 1937, la propriété porte d'ailleurs le nom de « Soddy's hexlet ». Cette propriété a été découverte un siècle plus tôt et indépendamment au Japon comme l'atteste un sangaku daté de 1822.

Nombre de sphères bleues

Soit V la sphère verte, M_1 une des deux sphères marron et A le point de tangence entre ces deux sphères. Une inversion de pôle A transforme les sphères V et M_1 en deux plans parallèles P_V et P_{M1}. Comme le pôle A n'appartient ni à la seconde sphère marron M_2 ni à aucune des sphères bleues B_i, les inverses de ces sphères sont encore des sphères M_2' et B_i'. Comme la sphère M_2 et les sphères B_i sont tangentes à V et M_1, les sphères inverses M_2' et B_i' sont donc tangentes aux deux plans P_V et P_{M1}, et donc comprises entre ces deux plans. Toutes les sphères M_2' et B_i' ont donc le même diamètre. Par ailleurs chacune des sphères bleues est tangente à la sphère M_2 et l'ensemble de ces sphères bleues forment un collier autour de M_2. Les sphères B_i' forment donc encore un collier autour de la sphère M_2'.

Un plan parallèle à P_V et P_{M1} qui passe par le centre O' de la sphère M_2' passe aussi par les centres O'_i des sphères B_i'. Tous les triangles formés par O' et deux centres de sphères B_i' tangentes entre elles sont équilatéraux et leur côté vaut le diamètre commun de M_2' et B_i'. Par conséquent les centres O'_i des sphères B_i' sont les sommets d'un hexagone régulier. Il y a en définitive 6 sphères bleues autour des sphères marron.

Relation entre les rayons des sphères bleues

Une relation entre le rayon d'une sphère et le rayon de la sphère inverse :

Soit une sphère d'inversion de rayon R et de centre A qui transforme une sphère S ne passant pas par A de rayon r et de centre O en une sphère S' de rayon r' et de centre O'. La droite (AO) coupe S en M et N. Si M' et N' sont les inverses de M et N, le droite (AO) contient les points O' (qui n'est pas l'inverse de O !), M' et N'. Par définition de l'inversion de pôle A on a les relations $\overline{AM}.\overline{AM'} = R^2$ et $\overline{AN}.\overline{AN'} = R^2$. Par ailleurs par définition de la puissance du point A par rapport à la sphère S' : $\overline{AM'}.\overline{AN'} = AO'^2 - r'^2$.

D'où l'on déduit les égalités $|\overline{AM} - \overline{AN}| = 2r = \left|\frac{R^2}{\overline{AM'}} - \frac{R^2}{\overline{AN'}}\right| = R^2\left|\frac{\overline{AN'}-\overline{AM'}}{\overline{AN'}.\overline{AM'}}\right| = \frac{R^2 2r'}{AO'^2 - r'^2}$.

On a donc la relation entre le rayon r d'une sphère et le rayon r' de la sphère inverse :

$$\frac{1}{r} = \frac{AO'^2 - r'^2}{r'R^2} \quad (1)$$

On revient à notre problème.

Notons R le rayon d'une sphère d'inversion centrée en A, r le rayon de la sphère marron et $r_1, \ldots, r_6$ les rayons des six sphères bleues (la numérotation respectant l'ordre de ces sphères dans le collier). On a vu que les rayons des sphères B'_i sont tous égaux et on note r' ce rayon commun.

Dans l'hexagone régulier de sommets $O'_1, \ldots, O'_6$, les quadrilatères $O'_1O'_3O'_4O'_6$, $O'_1O'_2O'_4O'_5$ et $O'_2O'_3O'_5O'_6$ sont des rectangles. On considère par exemple le rectangle $O'_1O'_3O'_4O'_6$. On établit facilement à l'aide du théorème de Pythagore la relation (en introduisant par exemple les points P et Q projetés orthogonaux de A respectivement sur $(O'_1O'_3)$ et sur $(O'_4O'_6)$) :

$$O'_1A^2 + O'_4A^2 = O'_3A^2 + O'_6A^2$$

D'après l'égalité précédente on a aussi :

$$O'_1A^2 - r'^2 + O'_4A^2 - r'^2 = O'_3A^2 - r'^2 + O'_6A^2 - r'^2$$

Ou encore en divisant par $R^2 r'$ les deux membres de l'égalité :

$$\frac{O'_1A^2 - r'^2}{R^2 r'} + \frac{O'_4A^2 - r'^2}{R^2 r'} = \frac{O'_3A^2 - r'^2}{R^2 r'} + \frac{O'_6A^2 - r'^2}{R^2 r'}$$

Et finalement d'après la relation (1) :

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_6}$$

On démontrerait de même en considérant le rectangle $O'_1O'_2O'_4O'_5$ que :

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_5}$$

La considération du rectangle $O'_1O'_3O'_4O'_6$ serait redondante. D'où la relation cherchée entre les rayons des six sphères bleues

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_6} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_5}$$