Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine n°8

On va utiliser le théorème de Ptolémée.

Si EFG est un vrai triangle alors pour tout point P du plan on a l'inégalité :

$$EF\times GP + FG\times EP \geq EG\times FP$$

Avec égalité si et seulement si P appartient à l'arc d'extrémités E et G du cercle circonscrit au triangle EFG qui ne contient pas le point F.

ABCD est un carré de côté *a*.

ABC est un vrai triangle. En prenant A= E, B = G, C = F, M = P dans l'inégalité précédente on obtient :

$$AC\times BM + BC\times AM \geq AB\times CM$$

$$\sqrt{2} \times a \times BM + a \times AM \geq a \times CM$$

Avec égalité si et seulement si M appartient à l'arc d'extrémités A et B du cercle circonscrit au triangle ABC qui ne contient pas le point C.

De même ABD est un vrai triangle. En prenant A = E, D = F, B = G, M = P dans la même inégalité on obtient :

$$AD\times BM + BD\times AM \geq AB\times DM$$

$$a \times BM + \sqrt{2} \times a \times AM \geq a \times DM$$

Avec égalité si et seulement si M appartient à l'arc d'extrémités A et B du cercle circonscrit au triangle ABD qui ne contient pas le point D.

En ajoutant ces deux inégalités membre à membre et en simplifiant par *a* on trouve :

$$(1 + \sqrt{2}) \times (AM + BM) \geq CM + DM$$

$$\frac{AM+BM}{CM+DM} \geq \sqrt{2} - 1$$

Avec égalité si et seulement si M appartient à l'arc d'extrémités A et B du cercle circonscrit au triangle ABC qui ne contient pas les points C et D.

On montre de façon identique, en considérant les triangles ACD et BCD que :

$$\frac{CM+DM}{AM+BM} \geq \sqrt{2} - 1$$

Soit :

$$\frac{AM+BM}{CM+DM} \leq \sqrt{2} + 1$$

Avec égalité si et seulement si M appartient à l'arc d'extrémités C et D du cercle circonscrit au triangle BCD qui ne contient pas les point A et B.