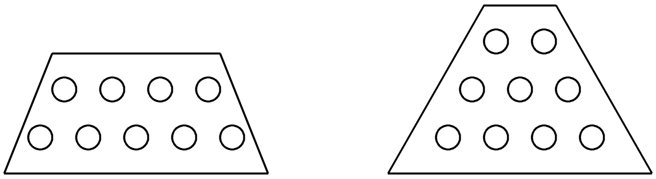
Les nombres trapézoïdaux

On dira qu'un nombre est *trapézoïdal* s'il peut s'exprimer comme une somme **d'au moins** deux entiers naturels consécutifs dont le plus petit n'est pas nul. Ainsi par exemple 9 peut s'écrire 4 + 5 ou bien encore 2 + 3 +4.



Quels sont les entiers qui sont des nombres trapézoïdaux ?
Au fait, de combien de façons 2015 est-il un nombre trapézoïdal ?

Solution

Soit 2^N une puissance de 2 avec N entier naturel. Si un tel nombre était trapézoïdal il existerait deux entiers naturels non nuls k et n tels que :

$$2^N = n + (n + 1) + \ldots + (n + k) = (k + 1)(2n + k)/2.$$

(k + 1) et (2 n + k) sont de parité contraire, et comme n et k ne sont pas nuls, celui qui est impair est au moins égal à 3. Par ailleurs ce nombre impair divise la quantité (k + 1)(2n + k)/2 et donc divise 2^N. Contradiction.

Si un nombre entier non nul n'est pas une puissance de 2, il peut se mettre sous la forme $i2^N$ avec i entier impair au moins égal à 3 et N entier naturel (éventuellement nul). Il s'agit de montrer qu'il existe alors toujours deux entiers naturels non nuls k et n tels que :

$$i2^N = (k + 1)(2n + k)/2$$

ou encore écrit autrement tels que :

$$i2^{N+1} = (k + 1)(2n + k).$$

- Si $i < 2^{N+1}$, on peut prendre k et n vérifiant i = k + 1 et $2^{N+1} = 2n + k$ c'est-à-dire k = i – 1 et $n = (2^{N+1} – i + 1)/2$ qui est bien un entier naturel non nul.
- Si $i > 2^{N+1}$, on peut prendre k et n tels que $2^{N+1} = k + 1$ et i = 2n +k c'est-à-dire $k = 2^{N+1} – 1$ et $n = (i - 2^{N+1} + 1)/2$ qui est bien un entier naturel non nul.

Ainsi tous les entiers positifs sont des nombres trapézoïdaux sauf ceux qui sont des puissances de 2.

Soit finalement à chercher le nombre de solutions possibles à l'équation en nombres entiers non nuls k et n :

$$2015 = 5 \times 13 \times 31 = (k +1)(2n + k)/2$$

ou encore

$$4030 = 2 \times 5 \times 13 \times 31 = (k +1)(2n + k)$$

Si k + 1 = 2 et 2n + k = 2015 alors k = 1 et n = 1007
Si k + 1 = 5 et 2n + k = 806 alors k = 4 et n = 401
Si k + 1 = 13 et 2n + k = 310 alors k = 12 et n = 149
Si k + 1 = 31 et 2n + k = 130 alors k = 30 et n = 50
Si k + 1 = 10 et 2n + k = 403 alors k = 9 et n = 197
Si k + 1 = 26 et 2n + k = 155 alors k = 25 et n = 65
Si k + 1 = 62 et 2n + k = 65 alors k = 61 et n = 2

Il y a donc 7 façons pour 2015 d'être trapézoïdal.