Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine n°6

On associe bijectivement à chaque plante un entier entre 1 et 6. Le problème consiste alors à dénombrer les carrés latins diagonaux d'ordre 6. On note $\mathcal{L}$ cet ensemble. On va restreindre la recherche aux éléments de $\mathcal{L}$ dont les entiers de la première diagonale sont rangés dans un ordre fixe. Plus précisément, si on note $d_{i,j}$ l'entier placé à l'intersection de la i ème ligne et de la j ième colonne, on va chercher le cardinal du sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathcal{L}$ constitué des carrés tels que $d_{i,i} = i$. En observant que $\mathcal{D}$ est stable par la symétrie s dont l'axe est la première diagonale d'un carré, et que l'on a même $s(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, puisque s est une involution, on peut encore restreindre davantage l'étude au sous-ensemble $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ constitué des carrés de $\mathcal{D}$ tels que $d_{4,3} < d_{3,4}$.

Les possibilités pour les couples ($d_{4,3}$; $d_{3,4}$) sont alors (1 ; 6), (2 ; 5), (2 ; 6), (5 ; 6), (1 ; 5) et (1 ; 2). Si ($d_{4,3}$; $d_{3,4}$) = (1 ; 6) ou (2 ; 5), il y a seulement 8 deuxièmes diagonales possibles et pour chacune d'elles les carrés latins n'aboutissent pas :

1					5
	2			4	
		3	6		
		1	4		
	3			5	
2					6

1					2
	2			4	
		3	6		
		1	4		
	3			5	
5					6

1					5
	2			3	
		3	6		
		1	4		
	4			5	
2					6

1					2
	2			3	
		3	6		
		1	4		
	4			5	
5					6

1					3
	2			1	
		3	5		
		2	4		
	6			5	
4					6

1					4
	2			1	
		3	5		
		2	4		
	6			5	
3					6

1					3
	2			6	
		3	5		
		2	4		
	1			5	
4					6

1					4
	2			6	
		3	5		
		2	4		
	1			5	
3					6

Pour les quatre autres possibilités, cela conduit alors à une partition de $\mathcal{D}'$ en quatre sous-ensembles $\mathcal{D}'_1$, $\mathcal{D}'_2$, $\mathcal{D}'_3$ et $\mathcal{D}'_4$. Il n'est pas nécessaire de les étudier toutes, une seule suffira. En effet, si c_1 désigne la permutation de la première et de la sixième colonne d'un carré, c_2 la permutation de la seconde et de la cinquième colonne, l_1 la permutation de la première et de la sixième ligne, l_2 la permutation de la seconde et de la cinquième ligne, t_1 la transposition qui échange les 1 et les 6 dans un carré, t_2 la transposition qui échange les 2 et les 5 dans un carré et enfin $f_1 = s \circ t_1 \circ c_1 \circ l_1$ et $f_2 = t_2 \circ c_2 \circ l_2$, on a $f_2(\mathcal{D}'_1) = \mathcal{D}'_2$, $f_1(\mathcal{D}'_2) = \mathcal{D}'_3$, $f_2(\mathcal{D}'_3) = \mathcal{D}'_4$ et $f_1(\mathcal{D}'_4) = \mathcal{D}'_1$ (f_1 et f_2 sont des involutions). Donc $\mathrm{card}(\mathcal{D}'_1) = \mathrm{card}(\mathcal{D}'_2) = \mathrm{card}(\mathcal{D}'_3) = \mathrm{card}(\mathcal{D}'_4)$.

Les diagonales à explorer dans $\mathcal{D}'_1$ sont les suivantes :

1					5
	2			4	
		3	6		
		2	4		
	1			5	
3					6

1					4
	2			1	
		3	6		
		2	4		
	3			5	
5					6

1					4
	2			3	
		3	6		
		2	4		
	1			5	
5					6

1					5
	2			3	
		3	6		
		2	4		
	1			5	
4					6

1					3
	2			1	
		3	6		
		2	4		
	4			5	
5					6

1					5
	2			1	
		3	6		
		2	4		
	3			5	
4					6

1					5
	2			1	
		3	6		
		2	4		
	4			5	
3					6

1					3
	2			4	
		3	6		
		2	4		
	1			5	
5					6

A partir des huit deuxièmes diagonales possibles, seules les deux premières aboutissent à des carrés latins, générant chacune 8 carrés latins.
Après quelques essais, il ressort donc que $\mathcal{D}'_1$ contient 16 carrés :

1	3	4	2	6	5
6	2	1	5	4	3
2	5	3	6	1	4
5	6	2	4	3	1
4	1	6	3	5	2
3	4	5	1	2	6

1	3	4	2	6	5
6	2	5	1	4	3
4	5	3	6	1	2
5	6	2	4	3	1
2	1	6	3	5	4
3	4	1	5	2	6

1	3	4	2	6	5
6	2	1	5	4	3
4	5	3	6	1	2
5	6	2	4	3	1
2	1	6	3	5	4
3	4	5	1	2	6

1	3	4	2	6	5
6	2	5	1	4	3
2	5	3	6	1	4
5	6	2	4	3	1
4	1	6	3	5	2
3	4	1	5	2	6

1	6	4	2	3	5
6	2	5	1	4	3
2	5	3	6	1	4
5	3	2	4	6	1
4	1	6	3	5	2
3	4	1	5	2	6

1	6	4	2	3	5
6	2	5	1	4	3
4	5	3	6	1	2
5	3	2	4	6	1
2	1	6	3	5	4
3	4	1	5	2	6

1	6	4	2	3	5
6	2	1	5	4	3
4	5	3	6	1	2
5	3	2	4	6	1
2	1	6	3	5	4
3	4	5	1	2	6

1	6	4	2	3	5
6	2	1	5	4	3
2	5	3	6	1	4
5	3	2	4	6	1
4	1	6	3	5	2
3	4	5	1	2	6

1	6	5	3	2	4
4	2	6	5	1	3
2	5	3	6	4	1
3	1	2	4	6	5
6	3	4	1	5	2
5	4	1	2	3	6

1	6	5	2	3	4
6	2	4	5	1	3
2	5	3	6	4	1
3	1	2	4	6	5
4	3	6	1	5	2
5	4	1	3	2	6

1	6	5	2	3	4
4	2	6	5	1	3
2	5	3	6	4	1
3	1	2	4	6	5
6	3	4	1	5	2
5	4	1	3	2	6

1	6	5	3	2	4
6	2	4	5	1	3
2	5	3	6	4	1
3	1	2	4	6	5
4	3	6	1	5	2
5	4	1	2	3	6

1	6	5	3	2	4
4	2	6	5	1	3
2	1	3	6	4	5
3	5	2	4	6	1
6	3	4	1	5	2
5	4	1	2	3	6

1	6	5	2	3	4
6	2	4	5	1	3
2	1	3	6	4	5
3	5	2	4	6	1
4	3	6	1	5	2
5	4	1	3	2	6

1	6	5	2	3	4
4	2	6	5	1	3
2	1	3	6	4	5
3	5	2	4	6	1
6	3	4	1	5	2
5	4	1	3	2	6

1	6	5	3	2	4
6	2	4	5	1	3
2	1	3	6	4	5
3	5	2	4	6	1
4	3	6	1	5	2
5	4	1	2	3	6

D’où card($\mathcal{D}$)= card($\mathcal{D}'_1$) + card($\mathcal{D}'_2$) + card($\mathcal{D}'_3$) + card($\mathcal{D}'_4$) = 64 ;
card($\mathcal{D}$) = card($\mathcal{D}$) + card(s($\mathcal{D}$)) = 128 ;
card($\mathcal{L}$) = nombre de permutations de l’ensemble (1,2,3,4,5,6) × card($\mathcal{D}$) = 720 × 128 = 92 160.

Il y a donc 92 160 carrés latins diagonaux d’ordre 6.