Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine n°4

On suppose qu'il s'agit d'un vrai quadrilatère convexe et donc que A n'est pas nul. Sinon l'inégalité est triviale.

A l'aide de la propriété des milieux on établit facilement que :

$A_1 = \frac{1}{4}$ aire(ABD), $A_2 = \frac{1}{4}$ aire(ABC), $A_3 = \frac{1}{4}$ aire(BCD), $A_4 = \frac{1}{4}$ aire(ACD).

On tire alors $A_1 + A_3 = A_2 + A_4 = \frac{1}{4}A$. On pose $A' = A/2$. On a donc $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2}A = A'$.

L'inégalité proposée est équivalente à $A_1^{1/3} + A_2^{1/3} + A_3^{1/3} + A_4^{1/3} \leq (16A')^{1/3}$ ou encore à

$$\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{A_i}{A'}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \leq 1$$

Mais d'après l'inégalité arithmético-géométrique on sait que l'on a l'inégalité pour tout i entre 1 et 4 :

$\left(\frac{A_i}{A\prime}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{A_i}{A\prime} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$, avec égalité quand $4A_i = A'$.

En sommant membre à membre pour i de 1 à 4 on obtient finalement :

$$\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{A_i}{A'}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{A'} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4}\right) = 1$$

Avec égalité quand $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$.

On examine plus précisément le cas d'égalité et on cherche les quadrilatères convexes tels que $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$.
Si $A_1 = A_2$, comme AE = EB, alors H et F sont à la même distance de la droite (AB), d'où (HF) est parallèle à (AB). De même avec $A_3 = A_4$ on a (HF) est parallèle à (DC). Donc les côtés [AB] et [DC] sont parallèles. En considérant ensuite les égalités $A_1 = A_4$ et $A_3 = A_2$ on aboutit au fait que les côtés [AD] et [BC] sont parallèles. Le quadrilatère est donc un parallélogramme. C'est aussi une condition suffisante car dans un parallélogramme on a toujours $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A/8$.

En définitive on a l'inégalité générale $A_1^{1/3} + A_2^{1/3} + A_3^{1/3} + A_4^{1/3} \leq 2A^{1/3}$ avec égalité quand le quadrilatère est un parallélogramme.