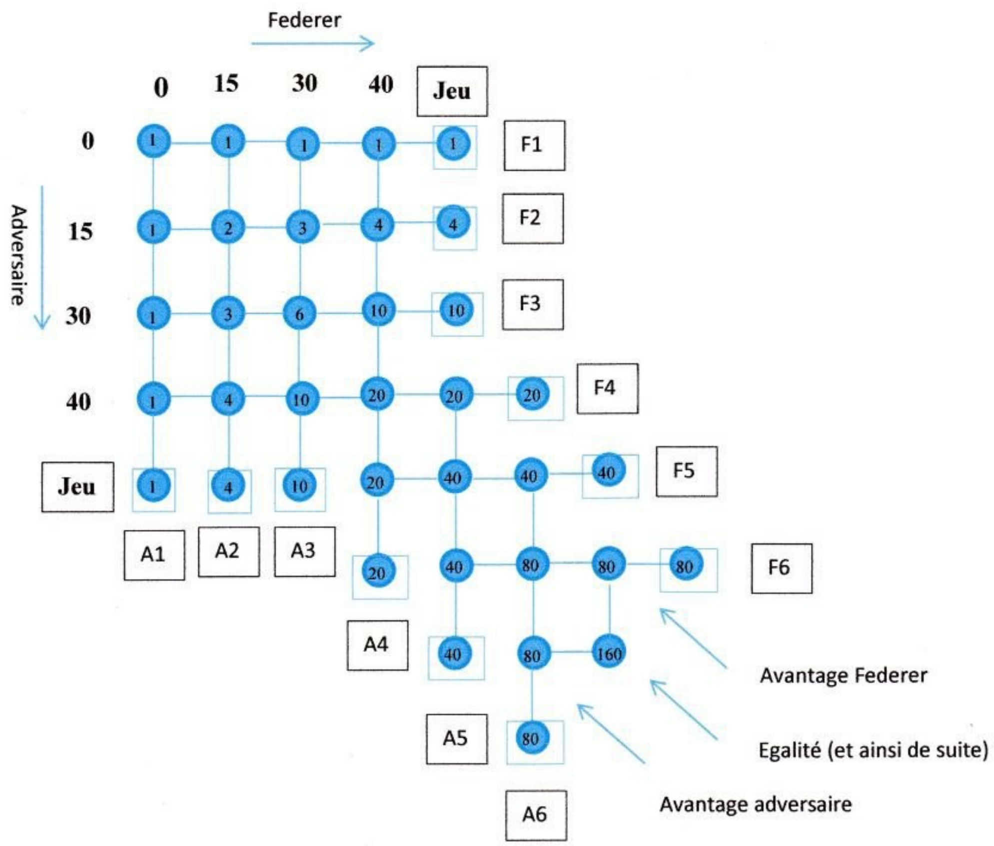
Enoncé proposé par Frédéric de Ligt pour le problème de la quinzaine

Quand le tennisman Roger Federer est au service il a 72 % de chances de gagner le point (statistiques du tournoi de Roland Garros 2014). A-t-il pour autant 72 % de chances de remporter le jeu (si ce jeu n'est pas décisif) ?

Solution

La grille ci-dessous présente les différentes possibilités d'issues du jeu. Chaque cercle correspond à un état d'avancement possible du jeu. A l'intérieur de chaque cercle est indiqué le nombre de chemins qui mènent à cet état.



Pour faciliter la lecture des calculs on note $p = 0{,}72$.

Dans le cas F1 Federer gagne sans que son adversaire ait marqué un seul point. La probabilité d'une telle issue est de p^4. Dans le cas F2 Federer gagne le jeu et son adversaire n'a marqué qu'un seul point. La probabilité d'une telle issue est $4(1-p)p^4$.

La probabilité de l'issue F3 est donc de $10(1-p)^2p^4$, celle de l'issue F4 est de $20(1-p)^3p^5$, celle de l'issue F5 est de $40(1- p)^4p^6$, celle de de l'issue F6 est de $80(1-p)^5p^7$ et plus généralement, pour un entier n plus grand ou égal à 3, la probabilité de l'issue Fn est de $10\times2^{n-3}(1-p)^{n-1}p^{n+1}$.

La probabilité pour Federer de gagner le jeu se calcule en additionnant toutes les probabilités liées aux issues Fn. On obtient donc l'expression suivante pour le calcul de cette probabilité :

$p^4 + 4(1-p)p^4 + 10(1-p)^2p^4 + 20(1-p)^3p^5 + ... + 10\times2^{n-3}(1-p)^{n-1}p^{n+1} + ... =$

$p^4 + 4(1-p)p^4 + 10(1-p)^2p^4\,[1 + 2(1-p)p + ... + 2^{n-3}(1-p)^{n-3}p^{n-3} + ...] =$

$p^4[1 + 4(1-p) + 10(1-p)^2/(1-2p(1-p))]$ car $0 < 2p(1-p) < 1$.

Avec la valeur donnée à p de 72 % cela donne une probabilité d'environ 92 % à Federer d'emporter le jeu. Le système de comptage a très fortement amplifié son avantage au service.

En disposant du pourcentage de réussite au service de son adversaire on pourrait imaginer de calculer de façon similaire les chances de Federer sur un set, voire sur tout un match mais ce serait sans doute au prix de longs calculs.