Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 15

Interprétation géométrique.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, les points de coordonnées (x, y, z) avec x, y, z strictement positifs qui vérifient $x + y + z = 3$ appartiennent à une portion de plan de forme triangulaire et ceux qui vérifient $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ appartiennent à un quart de demi-sphère de rayon 2. L'intersection entre cette portion de plan et ce quart de demi-sphère est un cercle complètement contenu dans la partie de l'espace où les points ont des coordoordonnées strictement positives. On cherche parmi les plans d'équation $y = mx$ les deux qui sont tangents à ce cercle. Entre les deux valeurs extrêmes trouvées pour m, ces plans coupent le cercle en deux points, en dehors de ces valeurs il n'y a pas d'intersection.

Solution

Soit à trouver les valeurs du paramètre m pour lesquelles il existe une unique solution au système d'équations d'inconnues x, y et z strictement positives :

$x + y + z = 3$ (1)

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (2)

$y = mx$ (3)

A l'aide des équations (1) et (3) on peut exprimer les inconnues y et z en fonction x. En reportant ces expressions dans l'équation (2) on obtient : $(1 + m^2)x^2 + [3 - (1 + m)x]^2 = 4$. En développant cette équation on parvient à : $(1 + m + m^2)x^2 - 3(1 + m)x + 2{,}5 = 0$ (4). Le discriminant de ce trinôme vaut $-m^2 + 8m - 1$. L'équation (4) admet une racine double si son discriminant est nul.

Ce qui se produit pour deux valeurs de m à savoir $4-\sqrt{15}$ et $4+\sqrt{15}$.

L'équation (4) admet deux solutions quand son discriminant est strictement positif, ce qui se produit quand m est compris entre $4-\sqrt{15}$ et $4+\sqrt{15}$. Si m est en dehors de cet intervalle l'équation (4) n'admet pas de solution. En conséquence le rapport y/x est compris entre $4-\sqrt{15}$ et $4+\sqrt{15}$ et donc de même le rapport x/y car $4-\sqrt{15}$ et $4+\sqrt{15}$ sont inverses l'un de l'autre.