Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 12

On note S_n la variable aléatoire qui associe à chaque réalisation de n lancers du dé le nombre de 6 obtenus. Cette variable aléatoire suit une loi binomiale B(n ; $\frac{1}{6}$).

On sait que $E(S_n) = \frac{n}{6}$ et que $\sigma_n^2 = n \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $p(|S_n - E(S_n)| \geq \frac{n}{6}) \leq \frac{\sigma_n^2}{(\frac{n}{6})^2}$ ou encore,

puisque $S_n \geq 0$, $p(S_n \geq \frac{n}{3}) \leq \frac{5}{n}$.

Pour $n \geq 11$ on a donc $p\left(S_n < \frac{n}{3}\right) \geq \frac{6}{11} > \frac{1}{2}$.

Il reste à vérifier que pour tous les entiers n compris entre 1 et 10 on a $p\left(S_n < \frac{n}{3}\right) > \frac{1}{2}$.

$P(S_1 < \frac{1}{3}) = P(S_1 = 0) = \frac{5}{6} > \frac{1}{2}$.

$P(S_2 < \frac{2}{3}) = P(S_2 = 0) = (\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{36} > \frac{1}{2}$.

$P(S_3 < 1) = P(S_3 = 0) = (\frac{5}{6})^3 = \frac{125}{216} > \frac{1}{2}$.

$P(S_4 < \frac{4}{3}) = P(S_4 = 0) + P(S_4 = 1) = (\frac{5}{6})^4 + 4 \times \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^3 = \frac{1125}{1296} > \frac{1}{2}$.

$P(S_5 < \frac{5}{3}) = P(S_5 = 0) + P(S_5 = 1) = (\frac{5}{6})^5 + 5 \times \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^4 = \frac{3125}{3888} > \frac{1}{2}$.

$P(S_6 < 2) = P(S_6 = 0) + P(S_6 = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 + 6 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{34375}{46656} > \frac{1}{2}$.

$P(S_7 < \frac{7}{3}) = P(S_7 = 0) + P(S_7 = 1) + P(S_7 = 2) = (\frac{5}{6})^7 + 7 \times \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^6 + 21 \times (\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^5 = \frac{253125}{279936} > \frac{1}{2}$.

$P(S_8 < \frac{8}{3}) = P(S_8 = 0) + P(S_8 = 1) + P(S_8 = 2) = (\frac{5}{6})^8 + 8 \times \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^7 + 28 \times (\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^6 = \frac{1453125}{1679619} > \frac{1}{2}$.

$P(S_9 < 3) = P(S_9 = 0) + P(S_9 = 1) + P(S_9 = 2) = (\frac{5}{6})^9 + 9 \times \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^8 + 36 \times (\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^7 = \frac{8281250}{10077696} > \frac{1}{2}$.

$P(S_{10} < \frac{10}{3}) = P(S_{10} = 0) + P(S_{10} = 1) + P(S_{10} = 2) + P(S_{10} = 3) = (\frac{5}{6})^{10} + 10 \times \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^9 + 45 \times (\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^8 + 120 \times (\frac{1}{6})^3 \times (\frac{5}{6})^7 = \frac{56250000}{60466176} > \frac{1}{2}$.

La propriété proposée est donc vraie pour tout entier n non nul.