Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 11

Pour tout réel x dans l'intervalle $]0\,;\,\pi/2\,[$, on pose $y = \sin x$ et donc $\cos x = \sqrt{1-y^2}$.

L'inégalité proposée est équivalente à :

Pour tout réel y dans l'intervalle $]0\,;\,1[$ on a $y^{\sqrt{1-y^2}} + (\sqrt{1-y^2})^y > 1$.

On suppose dans la suite que le réel y appartient à l'intervalle $]0\,;\,1[$.

On a : $y^{\sqrt{1-y^2}} > y$.

En effet $\sqrt{1-y^2} < 1$ et $\ln y < 0$, donc $\sqrt{1-y^2}\ln y > \ln y$ ou encore $\ln y^{\sqrt{1-y^2}} > \ln y$, et on conclut en utilisant la stricte croissance de la fonction exponentielle.

On a : $(\sqrt{1-y^2})^y > (1-y)^y$.

En effet $\sqrt{1-y^2} > 1-y$, donc $\ln\sqrt{1-y^2} > \ln(1-y)$ ou encore $y\ln\sqrt{1-y^2} > y\ln(1-y)$ c'est-à-dire $\ln(\sqrt{1-y^2})^y > \ln(1-y)^y$ et on conclut en utilisant la stricte croissance de la fonction exponentielle.

On tire des deux inégalités obtenues : $y^{\sqrt{1-y^2}} + (\sqrt{1-y^2})^y > y + (1-y)^y$.

On a maintenant : $y + (1-y)^y > 1$.

En effet $\ln(1-y) < 0$ et $(1-y) > 0$ donc $(1-y)\ln(1-y) < 0$ ou encore $\ln(1-y)^{(1-y)} < 0$. En utilisant la stricte croissance de la fonction exponentielle on a $(1-y)^{(1-y)} < 1$ et finalement $(1-y) < (1-y)^y$.

Et on a bien, en définitive, que pour tout réel y appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$: $(\sqrt{1-y^2})^y + y^{\sqrt{1-y^2}} > 1$.