Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 5

On se place dans un repère orthonormé (0 ; I ; J ; K).
Soit OABC un tétraèdre régulier avec A(0 ; 1 ; 1), B(1 ; 0 ; 1) et C(1 ; 1; 0). L'arête de ce tétraèdre vaut donc $\sqrt{2}$.

Pour tout tétraèdre régulier OA'B'C' il existe une similitude directe s qui transforme le tétraèdre OABC en le tétraèdre OA'B'C' avec s(A) = A', s(B) = B' et s(C) = C'. Cette similitude peut être obtenue comme composée d'une rotation dont l'axe passe par O et d'une homothétie de centre O de rapport positif. La rotation peut elle-même être obtenue comme composée de trois rotations autour des axes du repère.

On note R*x* la matrice d'une rotation d'angle θ_1 et d'axe (OI), R*y* la matrice d'une rotation d'angle θ_2 et d'axe (OJ), R*z* la matrice d'une rotation d'angle θ_3 et d'axe (OK) (rotations dans le sens direct), $H_{O,r}$ la matrice de l'homothétie de centre O et de rapport r > 0. On a :

$$\mathrm{R}_x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\quad \mathrm{R}_y=\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\quad \mathrm{R}_z=\begin{pmatrix}\cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0\\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}_{\mathrm{O,r}}=\begin{pmatrix}r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\end{pmatrix}$$

On note par commodité pour *i* = 1, 2, 3 : $\mathrm{C}_i=\cos\theta_i$ et $\mathrm{S}_i=\sin\theta_i$.
La matrice S de la similitude s est donnée par S = $H_{O,r}$ R*z* Ry R*x*

$$\mathrm{S}=\begin{pmatrix}rC_3C_2 & r(C_3S_1S_2+S_3C_1) & r(-S_2C_1C_3+S_3S_1)\\ -rS_3C_2 & r(-S_1S_2S_3+C_3C_1) & r(S_2C_1S_3+C_3S_1)\\ rS_2 & -rC_2S_1 & rC_2C_1\end{pmatrix}$$

Si on se donne les ordonnées a, b, c des points A', B', C', elles doivent vérifier les équations :
$-rC_2S_1+rC_2C_1=a$; $rS_2+rC_2C_1=b$; $rS_2-rC_2S_1=c$.
D'où $C_2C_1=(b-c+a)/2r$; $C_2S_1=(b-c-a)/2r$; $S_2=(b+c-a)/2r$.
On a d'une façon générale $(C_2C_1)^2+(C_2S_1)^2+S_2^2=1$ et donc on doit avoir :

$$r^2=\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{-a+b-c}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$$

Le rapport r de l'homothétie est donc déterminé.

Si on note a' = (b +c - a)/2 ; b' = (b - c- a)/2 ; c' = (b -c + a)/2, on a alors , $S_2=\dfrac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$,

$C_2=\pm\dfrac{\sqrt{b'^2+c'^2}}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$, $C_1=\pm\dfrac{c'}{\sqrt{b'^2+c'^2}}$, $S_1=\pm\dfrac{b'}{\sqrt{b'^2+c'^2}}$ qui correspondent bien à des expressions de sinus et cosinus d'angles. D'où l'existence des angles θ_1 et θ_2 . Le troisième angle n'étant pas à préciser dans cette configuration.
L'arête du tétrèdre OA'B'C' vaut donc r fois l'arête du tétraèdre OABC c'est-à-dire $\sqrt{2a'^2+2b'^2+2c'^2}$.
En définitive on a montré l'existence d'un tétraèdre régulier OA'B'C' tel que le sommet O appartient au plan d'équation *z* = 0, le sommet A' appartient au plan d'équation *z* = a, le sommet B' appartient au plan d'équation *z* = b et le sommet C' appartient au plan d'équation *z* = c.