Corrigé du sujet n° 12

On part de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

On en déduit

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

Par ailleurs, en posant $\alpha = \frac{\pi}{20}$, on a

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{20}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{20}\right) = \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha + \sin\alpha.$$

Donc

$$S^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin(2\alpha) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

Sachant que S est positif puisque α est dans le premier quadrant, on en déduit que

$$S = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}.$$

Pour mémoire :

Pour $\theta = \frac{2\pi}{5}$ ou $\frac{2\pi}{5}$, on a

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 1 = 0$$

soit

$$2\cos\theta + 2\cos(2\theta) + 1 = 0.$$

En posant $T = \cos\theta$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les racines de

$$2T + 2(2T^2 - 1) + 1 = 0$$

soit

$$4T^2 + 2T - 1 = 0.$$

On en déduit pour des raisons de signes que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

et que

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$