BTS Groupement B – Mathématiques

Éléments de correction

Session 2010

Exercice 1 :
Partie A :

1. Avec les notations du formulaire, on a

$$\begin{aligned} a(x) &= 1 \\ b(x) &= -1 \end{aligned}$$

d'où $g(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)} = -1$ et une primitive est $G(x) = -x$.
La solution générale de l'équation (E_0) est alors donnée par

$$y_0(x) = k\,\mathrm{e}^x \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, à l'aide de la dérivée d'un produit, on obtient :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x + 2 \\ &= (x+1)\,\mathrm{e}^x + 2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} g'(x) - g(x) &= (x+1)\,\mathrm{e}^x + 2 - [x\,\mathrm{e}^x + 2x + 2] \\ &= \mathrm{e}^x - 2x \end{aligned}$$

c'est à dire que la fonction g est une solution particulière de l'équation (E).

3. L'ensemble des solutions de (E) est donné par la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée (E_0). On obtient alors

$$y(x) = (x+k)\,\mathrm{e}^x + 2x + 2 \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

4. On a déjà

$$f(x) = (x+k)\,\mathrm{e}^x + 2x + 2$$

et on veut $f(0) = 3$, c'est à dire

$$\begin{aligned} k + 2 &= 3 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

La fonction cherchée est alors

$$f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x + 2x + 2$$

Partie B :

1. On a
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x+2) = +\infty \end{cases}$$
alors par produit et par somme, on a
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. La bonne réponse est la réponse **B** : la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est $y = 2x + 2$.

3. (a) Le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction exponentielle est :
$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$
Afin d'obtenir le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f, il faut multiplier ce développement par $(x+1)$ et ne garder que les termes de degré inférieur ou égal à 2.
On obtient, en ajoutant $2x + 2$:
$$f(x) = 3 + 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$
   (b) La bonne réponse est la réponse **B** : une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = 3 + 4x$.
   (c) La bonne réponse est la réponse **A** : au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la tangente T pour tout x, au voisinage de 0.

Partie C :

1. On a
$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}(2x+2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} \\ &= [1+2] - [1-2] \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. En posant $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$, on obtient
$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{1}(x+1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= [(x+1)\,\mathrm{e}^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= [(x+1)\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x]_{-1}^{1} \\ &= [\mathrm{e}^x]_{-1}^{1} \\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

3. (a) On a

$$\begin{aligned} K &= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \left((x+1)\,\mathrm{e}^{x} + 2x + 2\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} (x+1)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} (2x+2)\,\mathrm{d}x \\ &= J + I \\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} + 4 \end{aligned}$$

   (b) On obtient $K \approx 7,09$.

   (c) K correspond à l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 2 :
Partie A : Loi binomiale et loi de Poisson

1. (a) – Chaque prélèvement est constitué de 30 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise ;
   – Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
     – soit le succès : l'événement E, « une bouteille prélevée dans un stock important est non conforme au cahier des charges », de probabilité $p = p(E) = 0,02$,
     – soit l'échec : l'événement $\overline{E}$, « une bouteille prélevée dans un stock important est conforme au cahier des charges », de probabilité $q = 1 - p = 0,98$;
   – La variable aléatoire X mesure le nombre de succès,

   alors la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,02$.

   (b) On demande

$$\begin{aligned}p(X \leqslant 1) &= p(X = 0) + p(X = 1)\\ &= \mathrm{C}_{30}^{0} 0,02^{0} \times 0,98^{30} + \mathrm{C}_{30}^{1} 0,02^{1} \times 0,98^{29}\\ &= 0,98^{30} + 30 \times 0,02 \times 0,98^{29}\\ &\approx 0,879\end{aligned}$$

2. (a) Par approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, on conserve l'espérance. Or $E(X) = np = 0,6$, alors

$$\lambda = 0,6$$

   (b) On demande

$$\begin{aligned}p(Y \leqslant 1) &= p(Y = 0) + p(Y = 1)\\ &\approx 0,5488 + 0,3293\\ &\approx 0,878\end{aligned}$$

Partie B : Loi normale

1. La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne 70 et d'écart type 1 alors la variable aléatoire $T = \dfrac{Z - 70}{1}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$. On a donc :

$$\begin{aligned}p(68 \leqslant Z \leqslant 72) &= p\left(\frac{68 - 70}{1} \leqslant T \leqslant \frac{72 - 70}{1}\right)\\ &= p(-2 \leqslant T \leqslant 2)\\ &= \Pi(2) - \Pi(-2)\\ &= \Pi(2) - [1 - \Pi(2)]\\ &= 2\Pi(2) - 1\\ &\approx 0,95\end{aligned}$$

2. En procédant de la même façon, on a

$$\begin{aligned}p(70 - h \leqslant Z \leqslant 70 + h) &= p\left(\frac{70 - h - 70}{1} \leqslant T \leqslant \frac{70 + h - 70}{1}\right)\\ &= p(-h \leqslant T \leqslant h)\\ &= 2\Pi(h) - 1\end{aligned}$$

   Il faut alors résoudre

$$\begin{aligned}2\Pi(h) - 1 &= 0,99\\ \Pi(h) &= 0,995\\ h &\approx 2,575\\ h &\approx 2,58\end{aligned}$$

Partie C : Intervalle de confiance

1. L'intervalle
$$\left[\overline{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\,;\overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\right]$$
est l'intervalle de confiance de la moyenne avec le coefficient de confiance $2\Pi(t) - 1$.
Ici, il faut alors résoudre
$$\begin{aligned} 2\Pi(t) - 1 &= 0,95 \\ \Pi(t) &= 0,975 \\ t &\approx 1,96 \end{aligned}$$
d'où, l'intervalle de confiance centré en $\overline{x}$ de la moyenne μ des contenances des bouteilles de ce lot, avec le coefficient de confiance 95%, est
$$[69,92\,;70,32]$$

2. L'affirmation proposée est fausse.

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr