BTS Groupement A – Mathématiques

Éléments de correction

Session 2010

Exercice 1 :

Spécialité IRIS

Partie A :

1. On a

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_{2,3}(t) &= \mathrm{C}_3^2 t^2(1-t)^{3-2}\\ &= 3t^2(1-t)\\ &= -3t^3+3t^2\end{aligned}$$

2. Le point $M(t)$ est défini par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM(t)} &= \mathscr{B}_{0,3}(t)\overrightarrow{OA}+\mathscr{B}_{1,3}(t)\overrightarrow{OS}+\mathscr{B}_{2,3}(t)\overrightarrow{OR}+\mathscr{B}_{3,3}(t)\overrightarrow{OO}\\ &= (-t^3+3t^2-3t+1)\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+(3t^3-6t^2+3t)\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}+(-3t^3+3t^2)\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}x &= (-t^3+3t^2-3t+1)\times 4+(3t^3-6t^2+3t)\times 12\\ &= 32t^3-60t^2+24t+4\\ &= f_1(t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}y &= (3t^3-6t^2+3t)\times 6+(-3t^3+3t^2)\times 6\\ &= -18t^2+18t\\ &= g_1(t)\end{aligned}$$

3. Voir tableau 1 du document réponse.
4. On a

$$\begin{aligned}g_1(t) &= 18(-t^2+t)\\ g_1'(t) &= 18(-2t+1)\end{aligned}$$

On a $g_1'(t)=0 \iff t_1=\dfrac{1}{2}$ et d'après la question précédente, on a bien un maximum pour l'ordonnée de $M(t)$.

5. On a de même :

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 4\left[8t^3 - 15t^2 + 6t + 1\right] \\ f_1'(t) &= 4\left[24t^2 - 30t + 6\right] \\ &= 4 \times 6\left[4t^2 - 5t + 1\right] \end{aligned}$$

On a $f_1'(t) = 0 \Longleftrightarrow t_0 = \dfrac{1}{4}$ ou $t_2 = 1$. D'après la question 3, on a bien un maximum en $t_0 = \dfrac{1}{4}$ pour l'abscisse de $M(t)$.

6. À $t = 0$, le point $M(0)$ est le point A.
Le vecteur tangent $\overrightarrow{V_1(0)}$ à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point A est le vecteur dérivé pour $t = 0$.
On a $\overrightarrow{V_1(0)}\,(24\,;18)$.
On a aussi : $\overrightarrow{AS}\,(8\,;6)$.
D'où $\overrightarrow{V_1(0)} = 3\overrightarrow{AS}$: le vecteur tangent à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point A est alors le vecteur $\overrightarrow{AS}$.

Partie B :

1. On veut alors $\begin{cases} f_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 \\ g_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ d'où

$$\begin{aligned} 3(a+2)\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6(a+1)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3a \times \frac{1}{2} &= -\frac{3}{2} \\ 3(a+2) - 12(a+1) + 12a &= -12 \\ 3a + 6 &= 0 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

2. Pour $t = \dfrac{1}{2}$, il faut alors tracer les milieux respectifs des différents segments pour l'algorithme de De Casteljau.
   - Première étape : construction des points g_1, g_2 et g_3 milieux respectifs des segments $[OE]$, $[EF]$ et $[FA]$;
   - Seconde étape : construction des points G_1 et $G2$ milieux respectifs des segments $[g_1g_2]$ et $[g_2g_3]$;
   - Dernière étape : construction du point G milieu du segment $[G_1G_2]$.

   Construction : voir figure 1 du document réponse.
3. Tracé de la courbe $\mathscr{C}_2$: voir figure 1 du document réponse.

Exercice 1 :

Spécialités CIRA, Électrotechnique, Génie optique, Systèmes électroniques, TPIL

Partie A :

1. Voir figure 4 du document réponse 1.
2. (a) On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau} 1\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\,[t]_0^{\tau} \\ &= \frac{\tau}{2\pi} \end{aligned}$$

(b) On a, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\tau} \\ &= \frac{1}{n}\sin(n\tau) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\tau} \cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n\pi}\sin(n\tau) \end{aligned}$$

(c) On a aussi, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\tau} \sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\tau} \\ &= \frac{1}{n\pi}\,(1-\cos(n\tau)) \end{aligned}$$

3. À l'aide de la question précédente, on a :

$$A_0 = a_0 = \frac{\tau}{2\pi}$$

et pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n^2 &= \left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\tau)\right]^2 + \left[\frac{1}{n\pi}\,(1-\cos(n\tau))\right]^2 \\ &= \left[\frac{1}{n\pi}\right]^2 \times \left[\sin^2(n\tau) + 1 - 2\cos(n\tau) + \cos^2(n\tau)\right] \\ &= \left[\frac{1}{n\pi}\right]^2 \times 2 \times [1-\cos(n\tau)] \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{a_n^2+b_n^2}{2}=\left[\frac{1}{n\pi}\right]^2\times[1-\cos(n\tau)]$$

alors

$$\text{pour } n\geqslant 1,\ A_n=\frac{1}{n\pi}\sqrt{1-\cos(n\tau)}$$

4. Voir tableau 2 du document réponse 2.
5. (a) On a

$$\begin{aligned} h_{eff}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[h(t)]^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau}1^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}[t]_0^{\tau} \\ &= \frac{\tau}{2\pi} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

   (b) À l'aide du tableau, on obtient

$$P\approx 0,0898$$

   (c) De même,

$$\frac{P}{h_{eff}^2}\approx 0,72$$

Partie B :

1. On a

$$\begin{aligned} r(\omega) &= |H(\mathrm{j}\,\omega)| \\ &= \left|\frac{3}{3+2\,\mathrm{j}\,\omega}\right| \\ &= \frac{3}{|3+2\,\mathrm{j}\,\omega|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{9+4\omega^2}} \end{aligned}$$

2. Voir tableau 3 du document réponse 2.
3. Voir figure 6 du document réponse 2.
4. (a) À l'aide du tableau, on obtient

$$Q\approx 0,0491$$

   (b) On obtient

$$\frac{Q}{k_{eff}^2}\approx 0,95$$

Exercice 2 :

Toutes spécialités

Partie A :

1. On recherche une solution particulière sous la forme d'une constante, alors on pose $y(t) = \alpha$ d'où $y'(t) = y''(t) = 0$.
   En remplaçant dans (2), il vient $0 + 4\alpha = 20$ d'où $\alpha = 5$.
   $y(t) = 5$ est une solution particulière de (2).
2. – Il faut tout d'abord résoudre l'équation homogène associée qui s'écrit
   $$y''(t) + 4y(t) = 0$$
   L'équation caractéristique associée est
   $$r^2 + 4 = 0,$$
   équation qui admet $r_1 = 2\,\mathrm{i}$ et $r_2 = -2\,\mathrm{i}$ comme racines.
   La solution générale de l'équation homogène est alors
   $$y(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ deux réels}$$
   – La solution générale de l'équation différentielle (2) s'obtient en ajoutant la solution générale de l'équation homogène avec une solution particulière.
   On obtient alors la solution générale sous la forme :
   $$y(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) + 5 \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ deux réels}$$
3. La fonction f cherchée est de la forme
   $$f(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) + 5$$
   – On veut $f(0) = 0$ d'où $\lambda + 5 = 0$ c'est à dire $\lambda = -5$.
   D'où $f(t) = -5\cos(2t) + \mu\sin(2t) + 5$.
   – On obtient alors $f'(t) = 10\sin(2t) + 2\mu\cos(2t)$.
   Or, on veut $f'(0) = 0$ d'où $2\mu = 0$ c'est à dire $\mu = 0$.
   On a alors
   $$f(t) = 5\left(1 - \cos(2t)\right)$$

Partie B :

1. À l'aide de la table des transformées, on obtient directement :
   $$\begin{aligned} E(p) &= 8\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}\,\mathrm{e}^{-p\tau}\right] \\ &= \frac{8}{p^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-p\tau}\right) \end{aligned}$$
2. On a
   $$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[g''(t)\right](p) &= p^2G(p) - pg(0) - g'(0) \\ &= p^2G(p) \text{ car } g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = 0 \end{aligned}$$
   d'où, en prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle,
   $$\begin{aligned} p^2G(p) + 4G(p) &= E(p) \\ (p^2+4)G(p) &= E(p) \\ G(p) &= \frac{E(p)}{p^2+4} \\ G(p) &= \frac{8}{p^2(p^2+4)}\left(1 - \mathrm{e}^{-p\tau}\right) \end{aligned}$$

3. On a, en réduisant au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p^2+4} &= \frac{A(p^2+4)+Bp^2}{p^2(p^2+4)}\\ &= \frac{(A+B)p^2+4a}{p^2(p^2+4)}\end{aligned}$$

Par identification avec la relation demandée, on obtient le système

$$\begin{cases} A+B=0\\ 4A=8\end{cases}$$

d'où $A=2$ et $B=-2$.
On a alors

$$\frac{8}{p^2(p^2+4)}=\frac{2}{p^2}-\frac{2}{p^2+4}$$

4. On a

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=t\mathscr{U}(t)$$

et

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^2+4}\right]=\sin(2t)\mathscr{U}(t)$$

alors,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{8}{p^2(p^2+4)}\right]=(2t-\sin(2t))\,\mathscr{U}(t)$$

5. Avec les notations de l'énoncé, on obtient :

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{8}{p^2(p^2+4)}\right]=g_0(t)$$

On a $G(p)=\dfrac{8}{p^2(p^2+4)}-\dfrac{8\,\mathrm{e}^{-p\tau}}{p^2(p^2+4)}$ d'où

$$g(t)=g_0(t)-g_0(t-\tau)$$

6. Pour $t\geqslant\tau$, on a $\begin{cases}\mathscr{U}(t)=1\\ \mathscr{U}(t-\tau)=1\end{cases}$ d'où

$$\begin{aligned}g(t)&=2t-\sin(2t)-[2(t-\tau)-\sin(2(t-\tau))]\\ &=2\tau-\sin(2t)+\sin(2t-2\tau)\end{aligned}$$

7. (a) Pour $\tau=\pi$ et $t\geqslant\tau$, on a

$$\begin{aligned}g(t)&=2\pi-\sin(2t)+\sin(2t-2\pi) \quad \text{or } \sin(2t-2\pi)=\sin(2t)\\ &=2\pi-\sin(2t)+\sin(2t)\\ &=2\pi\end{aligned}$$

(b) courbe : voir figure 7 du document réponse 2.

Document réponse de l'exercice, spécialité IRIS

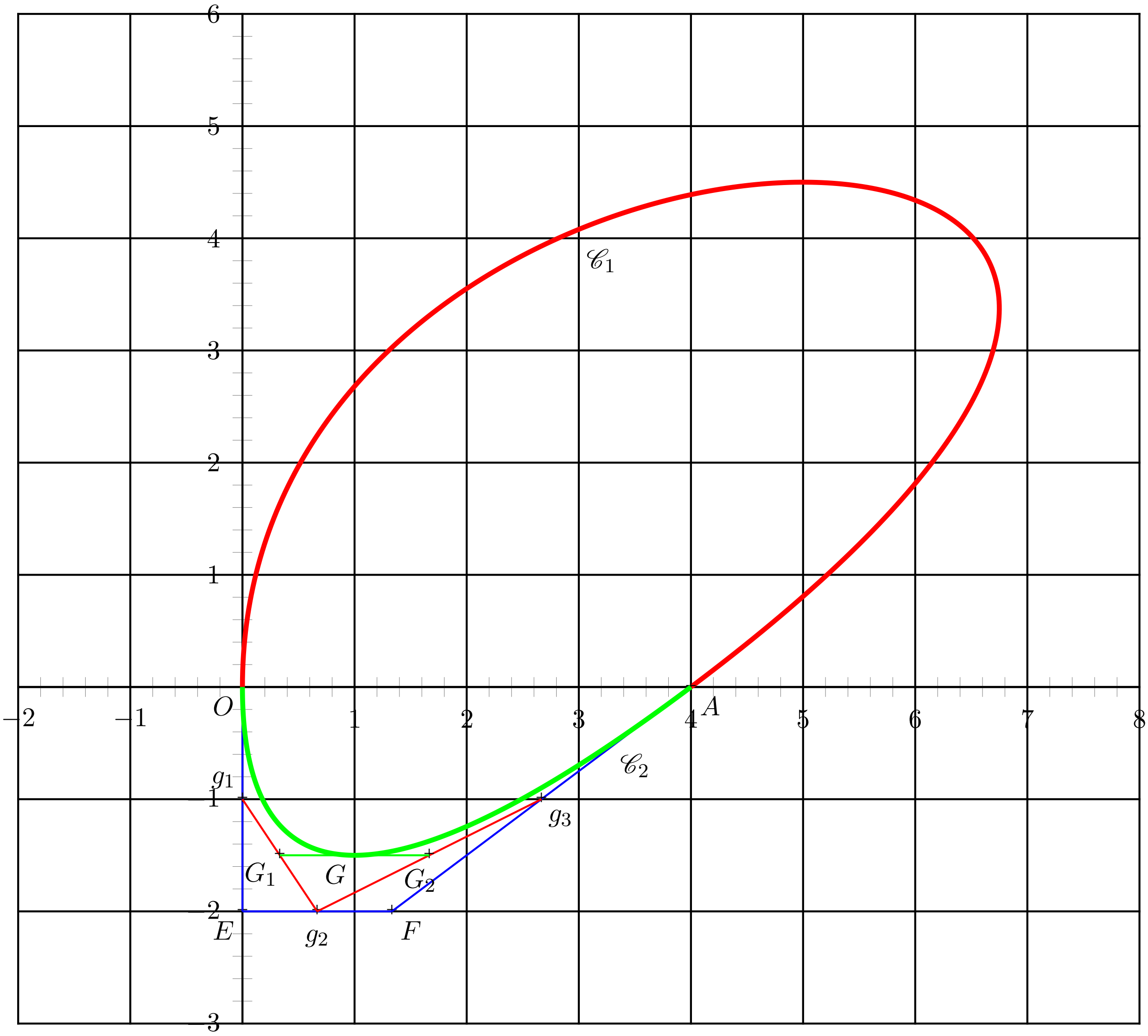


Fig. 1 – Représentation graphique des courbes de Bézier

Tab. 1 – Tableau des variations conjointes

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1
$f_1'(t)$	24	$+$	0	$-$	-12	$-$	0
$g_1'(t)$	18	$+$	9	$+$	0	$-$	-18
f_1	4	$\nearrow$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$	5	$\searrow$	0
g_1	0	$\nearrow$	$\frac{27}{8}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0

Document réponse 1 de l'exercice,
spécialités CIRA, Électrotechnique, Génie optique, Systèmes électroniques, TPIL

Fig. 2 – Courbe représentative de la fonction f

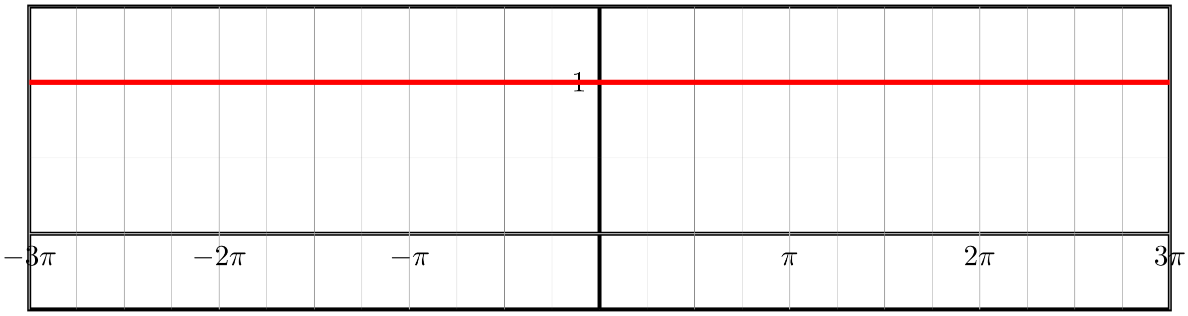


Fig. 3 – Courbe représentative de la fonction g

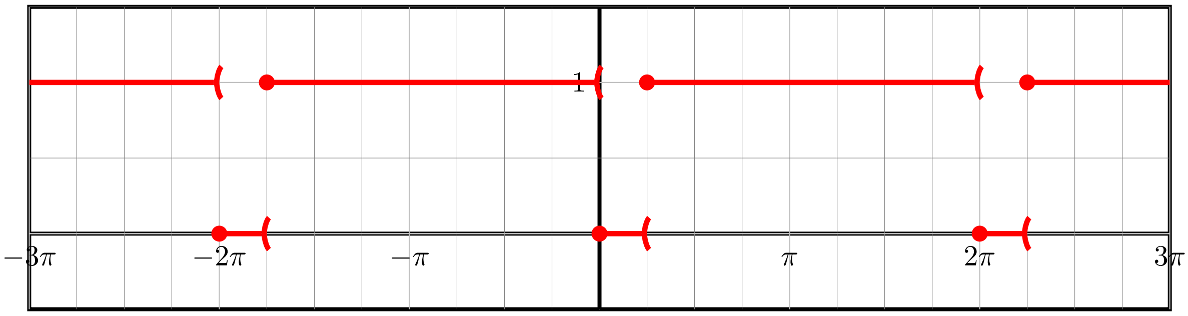
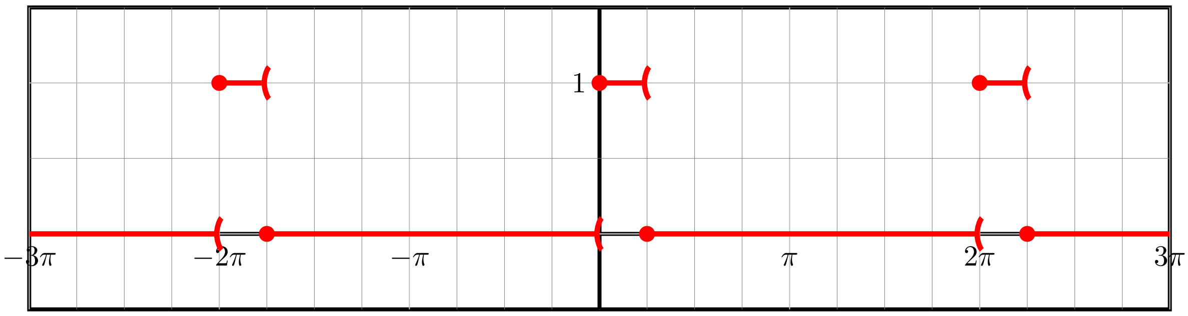


Fig. 4 – Courbe représentative de la fonction h



Document réponse 1 de l'exercice,
spécialités CIRA, Électrotechnique, Génie optique, Systèmes électroniques, TPIL

TAB. 2 – Tableau 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	$0,12500$	$0,17227$	$0,15915$	$0,13863$	$0,11254$	$0,08318$	$0,05305$	$0,02461$
n	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n	0	$0,01914$	$0,03183$	$0,03781$	$0,03751$	$0,03199$	$0,02274$	$0,01148$

TAB. 3 – Tableau 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7
B_n	$0,12500$	$0,14334$	$0,09549$	$0,06200$	$0,03952$	$0,02390$	$0,01287$	$0,00516$
n	8	9	10	11	12	13	14	15
B_n	$0,00000$	$0,00315$	$0,00472$	$0,00511$	$0,00465$	$0,00367$	$0,00242$	$0,00114$

FIG. 5 –

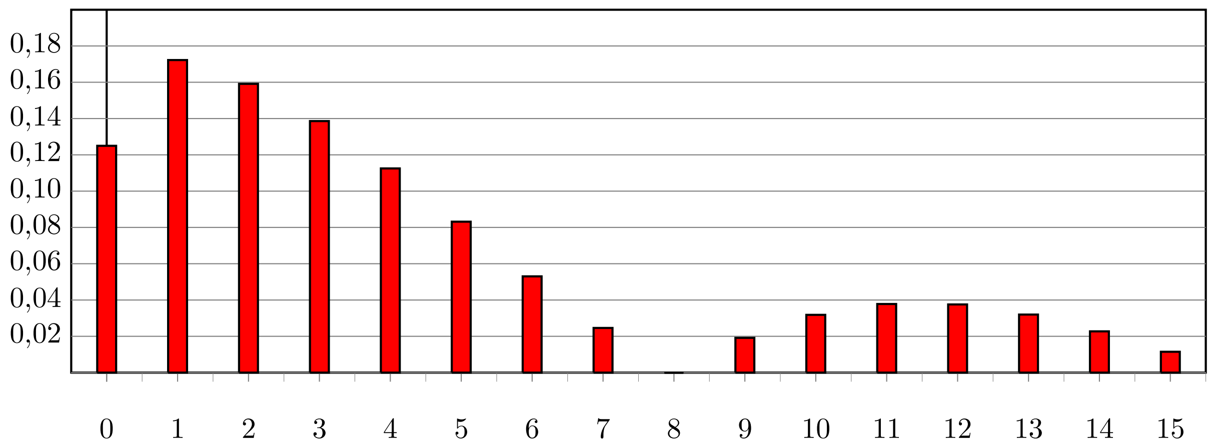
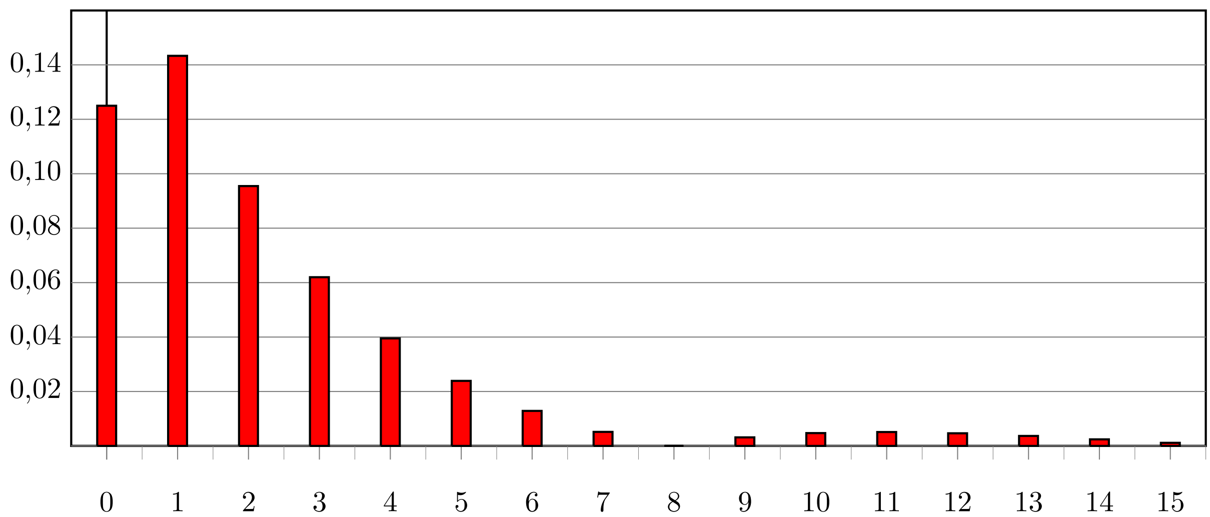
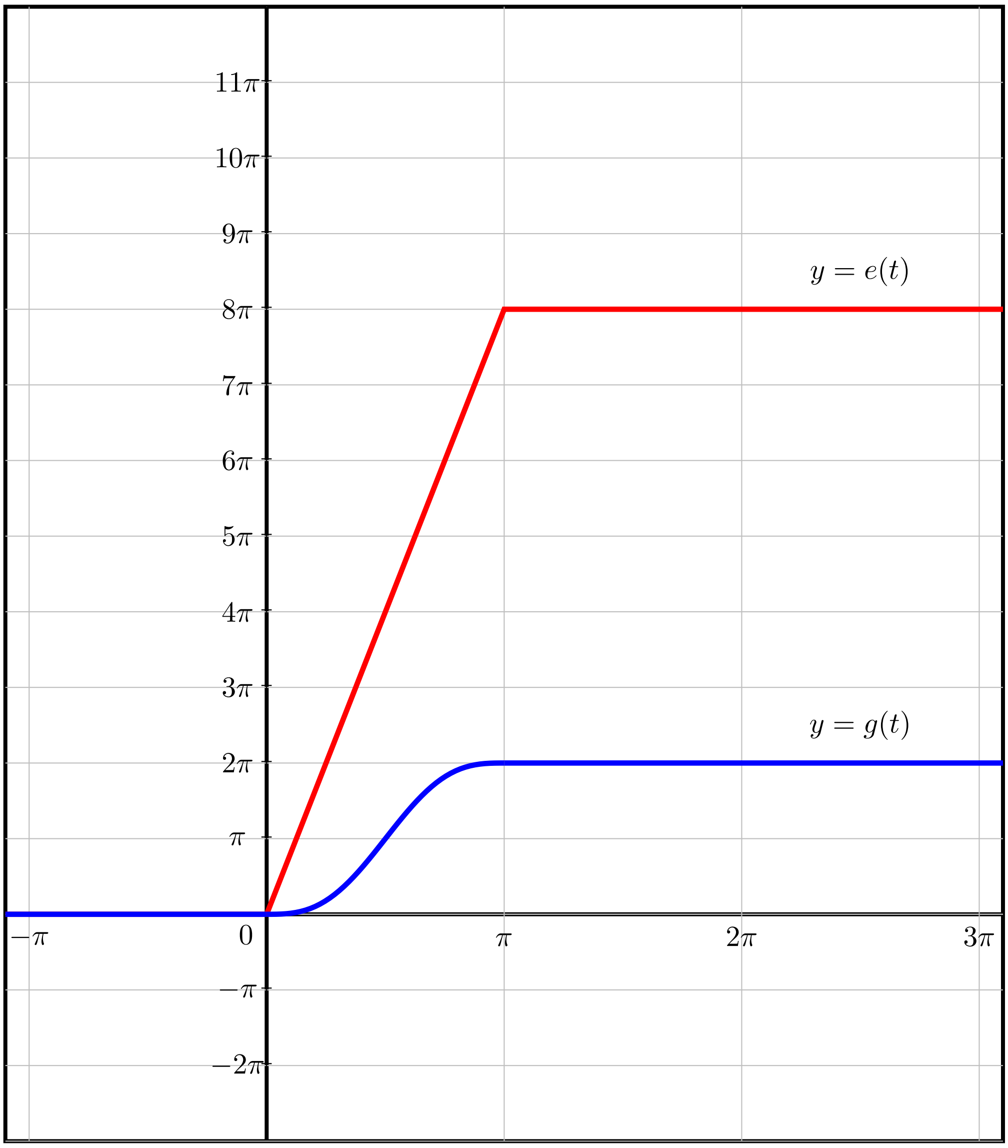


FIG. 6 –



Document réponse 2 de l'exercice 2,
toutes spécialités

FIG. 7 – Courbes représentatives des fonctions e et g



Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr