Un peu de trigonométrie (sujet n°12)

- **Enoncé**

Montrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{20}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}$$

Solution

Changeons l'écriture de $\cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{9\pi}{20})$.

$\cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{9\pi}{20}) = \cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20}) = \cos(\frac{\pi}{20}) + \sin(\frac{\pi}{20})$

➔ Calculons $\left(\cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{9\pi}{20})\right)^2$.

$$\left(\cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{9\pi}{20})\right)^2 = \left(\cos(\frac{\pi}{20}) + \sin(\frac{\pi}{20})\right)^2$$

$\Leftrightarrow \left(\cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{9\pi}{20})\right)^2 = \cos^2(\frac{\pi}{20}) + \sin^2(\frac{\pi}{20}) + 2\cos(\frac{\pi}{20})\sin(\frac{\pi}{20})$

$\Leftrightarrow \boxed{\left(\cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{9\pi}{20})\right)^2 = 1 + \sin(\frac{\pi}{10})}$

➔ Déterminons la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{10})$.

Pour cela, on utilise les formules suivantes :

$\mathbf{\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)}$

$\sin(3a) = \sin(2a + a)$

$\Leftrightarrow \sin(3a) = \cos(2a)\sin(a) + \sin(2a)\cos(a)$

$\Leftrightarrow \sin(3a) = \left(1 - 2\sin^2(a)\right)\sin(a) + 2\sin(a)\cos^2(a)$

$\Leftrightarrow \sin(3a) = \sin(a) - 2\sin^3(a) + 2\sin(a) - 2\sin^3(a)$

$\Leftrightarrow \mathbf{\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)}$

En posant $a = \frac{\pi}{10}$, on obtient alors $2a = \frac{2\pi}{10}$ et $3a = \frac{3\pi}{10}$.

$\frac{2\pi}{10}$ et $\frac{3\pi}{10}$ sont des angles complémentaires donc $\cos(2a) = \sin(3a)$.

Ce qui peut se traduire par : $1 - 2\sin^2(a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$. **(E)**

En posant $X = \sin(a)$, l'équation **(E)** devient :

$1 - 2X^2 = 3X - 4X^3 \Leftrightarrow 4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)(4X^2 + 2X - 1) = 0$.

Cette dernière équation admet trois solutions : 1 ; $\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Vu que $\sin(\frac{\pi}{10}) > 0$ et que $\frac{\pi}{10} \neq \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π), on obtient donc :

$$\boxed{\sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}.$$

On en déduit que :

$\left(\cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{9\pi}{20})\right)^2 = 1 + \sin(\frac{\pi}{10}) = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{4}$

Vu que $\cos(\frac{\pi}{20}) > 0$ et que $\cos(\frac{9\pi}{20}) > 0$, alors $\cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{9\pi}{20}) > 0$.

Finalement, $\cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{9\pi}{20}) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{4}}$

$$\boxed{\cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{9\pi}{20}) = \frac{1}{2} \times \sqrt{\sqrt{5}+3}}$$

Cyril GUILLON