BTS Groupement B

Mathématiques

Session 2011

Exercice 1 : (12 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendantes.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = -2\mathrm{e}^x + 6$ où y est une fonction inconnue de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' la fonction dérivée seconde.

1. (a) Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'équation : $r^2 - 3r + 2 = 0$.

   (b) En déduire les solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

   $$y'' - 3y' + 2y = 0$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 2x\mathrm{e}^x + 3$.

   (a) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification.*

   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

   La fonction dérivée g' de la fonction g est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$g'(x) = 2\mathrm{e}^x$	$g'(x) = 2x\mathrm{e}^x$	$g'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^x$

   (b) Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

Partie B : Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x + 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. (a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

   Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   (b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote dont on donnera une équation.

2. (a) Démontrer que le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction f est

   $$f(x) = 2 + x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to0} \varepsilon(x) = 0$$

(b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

(c) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite T. Recopier sur votre copie la justification exacte.

$\frac{3}{2}x^2$ est positif au voisinage de 0	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0	$2+x$ est positif au voisinage de 0

3. On admet que la dérivée de f est donnée, pour tout réel x, par

$$f'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$$

(a) Étudier sur $\mathbf{R}$ le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variations de f sur $\mathbf{R}$.

(b) Donner la valeur approchée arrondie à $0,01$ près du minimum de la fonction f.

4. (a) On note $I = \displaystyle\int_0^{0,5} \left(2 + x + \frac{3}{2}x^2\right) \mathrm{d}x$.

Démontrer que $I = 1,1875$.

(b) On note $K = \displaystyle\int_0^{0,5} (2x-1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 3 - 2\mathrm{e}^{0,5}$.

(c) On note $J = \displaystyle\int_0^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

En utilisant la question précédente, déterminer la valeur exacte de J.

(d) Vérifier que $J - I$ est inférieur à 2×10^{-2}.

Exercice 2 : (8 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Une entreprise fabrique des barres de combustible pour des centrales électriques. Des pastilles de combustible sont introduites dans des gaines qui servent à réaliser ces barres.

Dans cet exercice, les résultats sont à arrondir à 10^{-3}.

Partie A : Loi normale

Une gaine est considérée comme conforme pour le diamètre lorsque le diamètre intérieur, exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle $[8,18\,;8,48]$.

On note X, la variable aléatoire qui, à chaque gaine prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre intérieur.

On admet que X suit la loi normale de moyenne $8,33$ et d'écart type $0,09$.

1. Calculer la probabilité qu'une gaine ainsi prélevée soit conforme pour son diamètre intérieur.
2. Calculer le réel h positif tel que $p(8,33-h \leqslant X \leqslant 8,33+h) = 0,95$.
   Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

Partie B : Loi binomiale

On considère un stock important de gaine. On note E l'événement : « une gaine prélevée au hasard dans le stock n'est pas conforme pour le diamètre intérieur ».

On suppose que $p(E) = 0,096$.

On prélève au hasard 50 gaines dans le stock pour vérification du diamètre intérieur. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 gaines.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 gaines ainsi défini, associe le nombre de gaines non conformes pour le diamètre intérieur de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, cinq gaines ne soient pas conformes pour le diamètre intérieur.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux gaines ne soient pas conformes pour le diamètre intérieur.

Partie C : Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne μ inconnue des diamètres, exprimés en millimètres, d'un lot important de pastilles de combustible destinées à remplir les gaines.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque pastille prélevée au hasard dans le lot, associe son diamètre.

On admet que la variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $0,2$.

On désigne par $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 300 pastilles prélevées dans le lot, associe la moyenne des diamètres de ces pastilles (le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à un tirage avec remise).

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 8,13$. Dans ce cas, la livraison est dite conforme pour la diamètre.

L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 8,13$.

Le seuil de signification du test est fixé à 5%.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne $8,13$ et d'écart type $0,012$.
   On admet également que $p(8,106 \leqslant \overline{D} \leqslant 8,154) = 0,95$.
   Ce résultat n'a pas à être démontré.
   Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
2. On prélève un échantillon aléatoire de 300 pastilles dans la livraison reçue et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres des pastilles est $\overline{d} = 8,16$.
   Peut-on, au seuil de 5%, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr