

# BTS Groupement A – Mathématiques

Éléments de correction

Session 2012

**Exercice 1 :**

**Spécialités Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques – Systèmes  
Électroniques - Électrotechnique – Génie optique**

**Partie A :**

1. La variable aléatoire  $X$  suit  $\mathcal{N}(15; 0,35)$  alors  $T = \frac{X - 15}{0,35}$  suit  $\mathcal{N}(0; 1)$ .

(a) La pièce est conforme si  $X \in [14,3; 15,5]$ . On a donc

$$\begin{aligned} p(14,3 \leq X \leq 15,5) &= p\left(\frac{14,3 - 15}{0,35} \leq T \leq \frac{15,5 - 15}{0,35}\right) \\ &= p(-2 \leq T \leq 1,43) \\ &= \Pi(1,43) - \Pi(-2) \\ &= \Pi(1,43) - [1 - \Pi(2)] \\ &= \Pi(1,43) + \Pi(2) - 1 \\ &\approx 0,90 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} p(15 - h \leq X \leq 15 + h) &= p\left(\frac{-h}{0,35} \leq T \leq \frac{h}{0,35}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{h}{0,35}\right) - \Pi\left(\frac{-h}{0,35}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{h}{0,35}\right) - \left[1 - \Pi\left(\frac{h}{0,35}\right)\right] \\ &= 2\Pi\left(\frac{h}{0,35}\right) - 1 \end{aligned}$$

On veut  $2\Pi\left(\frac{h}{0,35}\right) - 1 = 0,95$  c'est-à-dire  $\Pi\left(\frac{h}{0,35}\right) = 0,975$ .

À l'aide de la table, on a  $\Pi(1,96) = 0,975$  d'où

$$\begin{aligned} \frac{h}{0,35} &= 1,96 \\ h &= 1,96 \times 0,35 \end{aligned}$$

$$\boxed{h \approx 0,69}$$

(c) D'après la question précédente, on a

$$p(14,31 \leq X \leq 15,69) = 0,95$$

c'est-à-dire que la probabilité qu'une pièce possède une épaisseur comprise entre 14,31 et 15,69 mm est égale à 0,95.

2. On a maintenant  $m = 14,9$ .

$X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(14,9; \sigma)$  alors  $T = \frac{X - 14,9}{\sigma}$  suit  $\mathcal{N}(0; 1)$ .

Comme précédemment, on a

$$\begin{aligned}
 p(14,3 \leq X \leq 15,5) &= p\left(\frac{14,3 - 14,9}{\sigma} \leq T \leq \frac{15,5 - 14,9}{\sigma}\right) \\
 &= p\left(\frac{-0,6}{\sigma} \leq T \leq \frac{0,6}{\sigma}\right) \\
 &= \Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) - \Pi\left(\frac{-0,6}{\sigma}\right) \\
 &= \Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) - \left[1 - \Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right)\right] \\
 &= 2\Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) - 1
 \end{aligned}$$

Il faut alors résoudre

$$2\Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) - 1 = 0,9$$

c'est-à-dire

$$\Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) = 0,95$$

d'où

$$\frac{0,6}{\sigma} = 1,645$$

alors

$$\boxed{\sigma \approx 0,36}$$

### Partie B :

- Les paramètres de la loi binomiale sont  $n = 50$  et  $p = 0,1$
- On demande la probabilité que deux pièces soient non conformes. On demande alors de calculer  $p(Y = 2)$  sachant que, pour

$$0 \leq k \leq 50, \quad p(Y = k) = C_{50}^k 0,1^k \cdot 0,9^{50-k},$$

c'est-à-dire ici  $p(Y = 2) = C_{50}^2 0,1^2 \cdot 0,9^{48}$ .

On obtient

$$\boxed{p(Y = 2) = 0,08}$$

- (a) Par approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, l'espérance est conservée. Or l'espérance d'une loi binomiale est  $E(Y) = np = 50 \times 0,1 = 5$ .  
L'espérance d'une loi de Poisson est le paramètre  $\lambda$  d'où

$$\boxed{\lambda = 5}$$

- (b) En appelant  $Z$  la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces non conformes suivant la loi de Poisson, on demande de calculer  $p(Z \leq 2)$ .

$$\begin{aligned}
 p(Z \leq 2) &= p(Z = 0) + p(Z = 1) + p(Z = 2) \\
 &\approx 0,007 + 0,034 + 0,084
 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(Z \leq 2) \approx 0,13}$$

### Partie C :

- D'après l'énoncé, nous avons :

$$\begin{aligned}
 p(A) &= 0,4 \\
 p_A(C) &= 0,9 \\
 p(\bar{C}) &= 0,06
 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
 p(\bar{A}) &= 0,6 \\
 p_A(\bar{C}) &= 0,1
 \end{aligned}$$

On demande

$$\begin{aligned} p(A \cap \bar{C}) &= p(A) \times p_A(\bar{C}) \\ &= 0,4 \times 0,1 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(A \cap \bar{C}) = 0,04}$$

2. Le tableau est le suivant :

	$C$	$\bar{C}$	
$A$	0,36	0,04	0,4
$\bar{A}$	0,58	0,02	0,6
	0,94	0,06	1

3. On demande de calculer

$$\begin{aligned} p_C(A) &= \frac{p(A \cap C)}{p(C)} \\ &= \frac{0,36}{0,94} \end{aligned}$$

$$\boxed{p_C(A) = 0,38}$$

4. On a  $p(A \cap C) = 0,36$  et  $p(A) \times p(C) = 0,4 \times 0,94 = 0,38$ , alors  $p(A \cap C) \neq p(A) \times p(C)$  donc

$\boxed{\text{les événements } A \text{ et } C \text{ ne sont pas indépendants.}}$

**Exercice 1 :****Spécialité Contrôle industriel et régulation automatique****Partie A :**

1. L'équation différentielle s'écrit  $y'(t) + 0,5y(t) = 0$ . La solution générale est alors donnée par

$$y_0(t) = ke^{-0,5t}, \quad \text{avec } k \in \mathbf{R}$$

2. On recherche une solution  $h$  constante, alors  $h(t) = a$  d'où  $h'(t) = 0$ .  
En remplaçant dans l'équation (E), on obtient immédiatement

$$h(t) = 3$$

3. La solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée et une solution particulière de (E)

$$y(t) = ke^{-0,5t} + 3 \quad \text{avec } k \in \mathbf{R}$$

Or on veut  $s(0) = 0$  d'où  $k = -3$ . On a alors

$$\text{Pour } t \in [0; +\infty[, \quad s(t) = 3 - 3e^{-0,5t}$$

4. (a) La fonction  $s$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et  $s'(t) = 1,5e^{-0,5t} \geq 0$ .

La fonction  $s$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

- (b) Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t} = 0$ , alors on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = 3 = \ell$$

5. La bonne courbe est la courbe 2. Elle décrit bien une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

- $s(0) = 0$  : ceci élimine la courbe 1 pour laquelle  $s(0) = 1$ .
- la fonction  $s$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  : ceci élimine la courbe 3 : la fonction n'est pas strictement croissante.
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = 3$  : ceci élimine la courbe 4 : la limite en  $+\infty$  semble être 5.

6. Pour déterminer ce temps de réponse, on va résoudre l'inéquation  $s(t) \geq 0,95 \times 3$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 3 - 3e^{-0,5t} &\geq 3 \times 0,95 \\ 0,05 &\geq e^{-0,5t} \\ \ln(0,05) &\geq -0,5t \\ t &\geq -2 \ln(0,05) \\ t &\geq 6 \end{aligned}$$

Le temps de réponse du système est de 6.

**Partie B :**

1. Avec  $T_e = 0,1$ , la relation (E') s'écrit

$$\begin{aligned} 20(x(n+1) - x(n)) + x(n+1) &= 3 \\ 21x(n+1) &= 20x(n) + 3 \\ x(n+1) &= \frac{20}{21}x(n) + \frac{3}{21} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$x(n+1) = \frac{20}{21}x(n) + \frac{1}{7}$$

2. On a  $x(4) = \frac{20}{21}x(3) + \frac{1}{7}$  d'où

$$x(4) \approx 0,531$$

De même,  $x(5) = \frac{20}{21}x(4) + \frac{1}{7}$ , d'où

$$x(5) \approx 0,649$$

3. En prenant la transformée en  $\mathcal{Z}$  de l'équation obtenue à la question 1, on obtient :

$$\begin{aligned} (\mathcal{Z}x(n+1))(z) &= \frac{20}{21}X(z) + \frac{1}{7}(\mathcal{Z}e(n))(z) \\ z[X(z) - x(0)] &= \frac{20}{21}X(z) + \frac{1}{7}\frac{z}{z-1} \quad \text{avec } x(0) = 0 \\ zX(z) &= \frac{20}{21}X(z) + \frac{1}{7}\frac{z}{z-1} \\ \left(z - \frac{20}{21}\right)X(z) &= \frac{1}{7}\frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{7(z-1)\left(z - \frac{20}{21}\right)}$$

4. Par réduction au même dénominateur, on a

$$\frac{A}{z-1} - \frac{B}{z - \frac{20}{21}} = \frac{(A-B)z + \left(-\frac{20}{21} + B\right)}{(z-1)\left(z - \frac{20}{21}\right)}$$

D'où, on obtient, par identification, le système suivant

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ -\frac{20}{21}A + B = \frac{1}{7} \end{cases}$$

On obtient facilement  $A = B = 3$ , c'est-à-dire

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{3}{z-1} - \frac{3}{z - \frac{20}{21}}$$

5. D'après la question précédente, on a donc  $X(z) = 3\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{20}{21}}\right)$ . En prenant la transformée inverse de ceci, on obtient

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \quad x(n) = 3\left(1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n\right)$$

6. (a) Comme  $\left(\frac{20}{21}\right)^n$  est une suite géométrique de raison  $\frac{20}{21} \in ]-1; 1[$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{20}{21}\right)^n = 0$ , c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = 3$$

(b) On résout l'inéquation proposée :

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n &\geq 0,95 \\ 0,05 &\geq \left(\frac{20}{21}\right)^n \\ \ln(0,05) &\geq n \ln\left(\frac{20}{21}\right) \\ n &\geq \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{20}{21}\right)} \quad \ln\left(\frac{20}{21}\right) < 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$n \geq n_0 = 62$$

(c) Le temps de réponse du système est alors  $n_0 T_e$ , c'est-à-dire

$$\text{Le temps de réponse du système est de } 6,2 \text{ secondes, à } 10^{-2} \text{ près.}$$

**Exercice 2 :**

**Spécialités Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques – Systèmes  
Électroniques - Électrotechnique – Génie optique – Contrôle industriel et régulation  
automatique**

**Partie A :**

1. (a) Voir figure 1

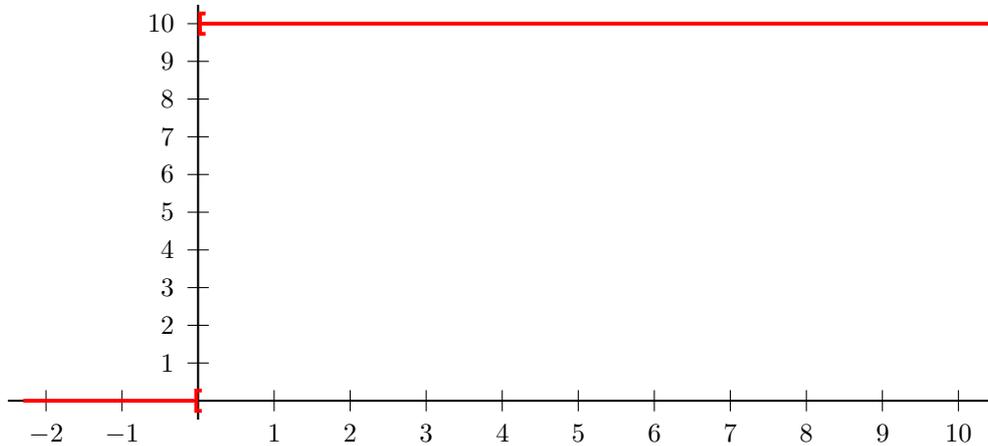


FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction  $e$

(b) On a  $E(p) = \frac{10}{p}$

2. D'après le formulaire, sachant que  $v(0^+) = 0$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{dv}{dt} \right] (p) &= pV(p) - v(0^+) \\ &= V(p) \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle et en remplaçant, on obtient

$$\begin{aligned} RCpV(p) + V(p) &= E(p) \\ (1 + RCp)V(p) &= E(p) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$V(p) = \frac{10}{p(1 + RCp)}$$

3. (a) Par réduction au même dénominateur, on a

$$\begin{aligned} \frac{10}{p} - \frac{10}{p + \frac{1}{RC}} &= \frac{10}{p(p + \frac{1}{RC})} \times \left[ p + \frac{1}{RC} - p \right] \\ &= \frac{10}{p(p + \frac{1}{RC})} \times \frac{1}{RC} \\ &= \frac{10}{p(1 + RCp)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$V(p) = \frac{10}{p} - \frac{10}{p + \frac{1}{RC}}$$

- (b) Par lecture inverse de la table de transformée de Laplace, on obtient

$$V(t) = 10\mathcal{U}(t) - 10e^{-\frac{t}{RC}}\mathcal{U}(t)$$

c'est-à-dire

$$\text{pour } t \geq 0, \quad v(t) = 10 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

**Partie B :**

1. On a

$$\begin{aligned}
 T(\omega) &= \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \\
 &= \frac{1}{jC\omega \left( R + \frac{1}{jC\omega} \right)} \\
 &= \frac{1}{1 + jRC\omega}
 \end{aligned}$$

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

2. On a

$$T(\omega_0) = \frac{1}{1 + j}$$

d'où

$$|T(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On a aussi

$$\arg(T(\omega_0)) = -\arg(1 + j)$$

c'est-à-dire

$$\arg(T(\omega_0)) = -\frac{\pi}{4}$$

3. Les bonnes réponses sont :

(a)

$$|T(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

(b)

$$\arg(T(\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

4. En prenant  $\omega = \omega_0$  dans les formules précédentes, on a bien

$$|T(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$\arg(T(\omega_0)) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

5. Pour  $\omega = \omega_0$ , le gain, en décibels, est

$$\begin{aligned}
 G_{\text{db}}(\omega_0) &= \frac{20}{\ln 10} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= \frac{-10}{\ln 10} \ln 2
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$G_{\text{db}}(\omega_0) = -3 \text{ dB}$$

6. (a) On a

$$\phi(\omega_0) = -\frac{\pi}{4}$$

(b) Voir figure 2

(c) d'où, par lecture graphique :

$$G_{\text{db}}(\omega_0) = -3 \text{ dB}$$

7. En appelant,  $\omega_1$  la pulsation correspondant au point  $M_1$ , on  $\phi(\omega_1) < \phi(\omega_0)$ .

Sachant que la fonction  $\phi$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ , on peut en déduire que

$$\omega_1 > \omega_0$$

Document réponse

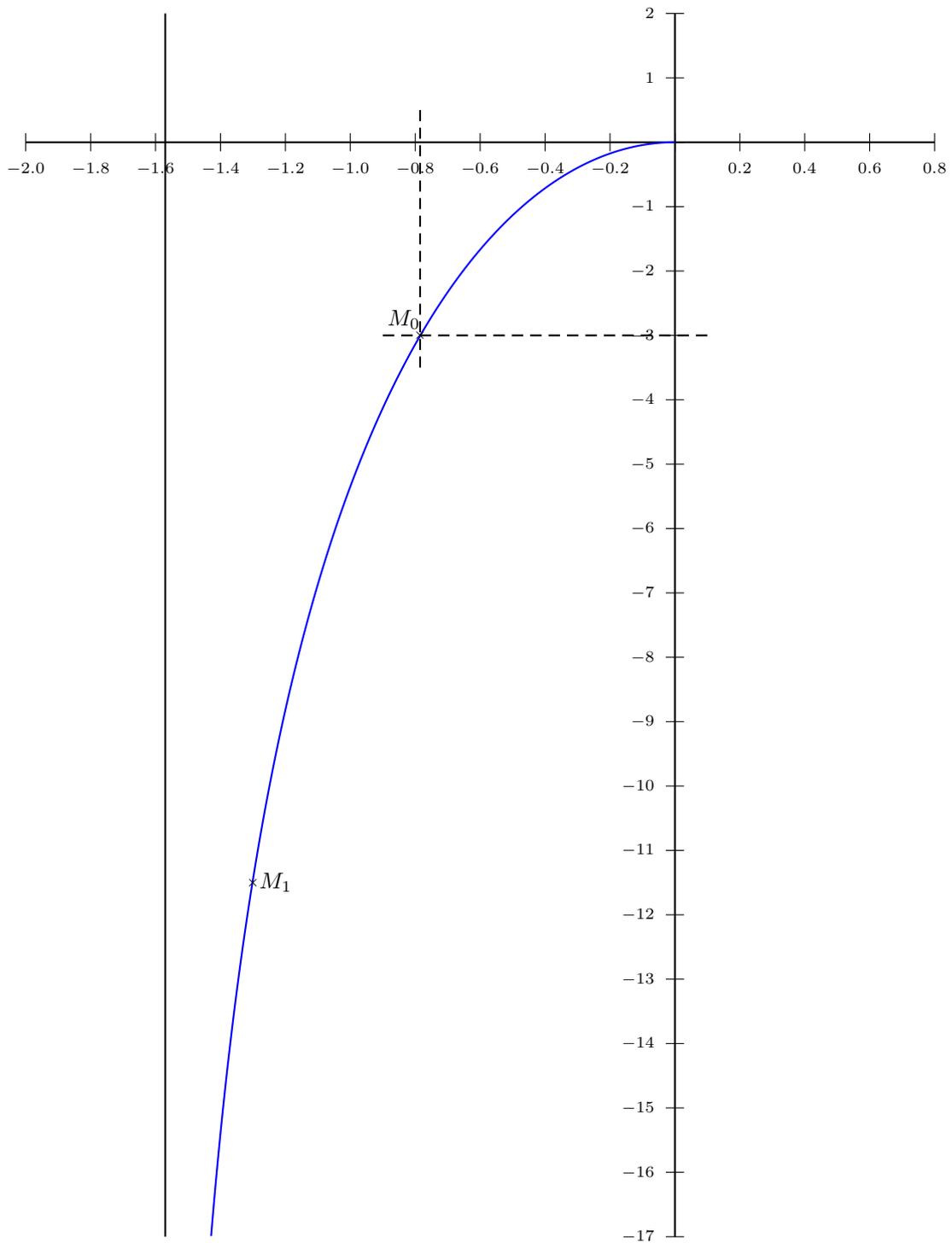


FIGURE 2 – Courbe décrite par le point  $M(\omega)$

Suggestions ou remarques : [xavier.tisserand@ac-poitiers.fr](mailto:xavier.tisserand@ac-poitiers.fr)