BTS Groupement A – Mathématiques

Éléments de correction

Session 2011

Exercice 1 :

Spécialités CIRA, IRIS, Systèmes électroniques, TPIL

Partie A : QCM

Les bonnes réponses sont :

1. $f(t) = 10\left(\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1)\right)$
2. $S(p) = \dfrac{1}{1+0,005p}V(p)$
3. $s(t) = k\mathrm{e}^{-200t} + 2$

Partie B : Simulation numérique

1. Comme $T_e = 0,5.10^{-3}$ alors $\dfrac{0,005}{T_e} = 10$, l'équation devient alors :

$$\begin{aligned} 10\left(y(n) - y(n-1)\right) + y(n) &= x(n) \\ \iff 11y(n) - 10y(n-1) &= x(n) \end{aligned}$$

2. (a) On a, sachant que $x(n) = 2e(n)$, en prenant la transformée en Z de l'équation précédente :

$$\begin{aligned} 11Y(z) - 10\left(\mathscr{Z}y(n-1)\right)(z) &= 2\left(\mathscr{Z}e(n)\right)(z) \\ 11Y(z) - 10z^{-1}Y(z) &= 2\frac{z}{z-1} \\ \left(11 - \frac{10}{z}\right)Y(z) &= \frac{2z}{z-1} \\ 11\left(z - \frac{10}{11}\right)\frac{Y(z)}{z} &= \frac{2z}{z-1} \\ \frac{Y(z)}{z} &= \frac{2}{11} \times \frac{2z}{(z-1)\left(z-\frac{10}{11}\right)} \end{aligned}$$

   (b) Une réduction au même dénominateur est nécessaire afin de montrer que

$$\frac{2}{11}\left(\frac{11z}{z-1} - \frac{10z}{z-\frac{10}{11}}\right) = \frac{2}{11} \times \frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{10}{11}\right)} = Y(z)$$

   (c) Par développement et simplification de l'expression précédente, on obtient :

$$Y(z) = 2 \times \frac{z}{z-1} - 2 \times \frac{10}{11} \times \frac{z}{z-\frac{10}{11}}$$

3. (a) Par lecture inverse de la table des transformées en Z, on obtient :

$$\begin{aligned} y(n) &= 2e(n) - 2 \times \frac{10}{11} \times \left(\frac{10}{11}\right)^n e(n) \\ &= 2e(n) - 2 \times \left(\frac{10}{11}\right)^{n+1} e(n) \end{aligned}$$

   (b) Comme $\left(\dfrac{10}{11}\right)^{n+1}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{10}{11} \in]-1\,;1[$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1} = 0$ d'où

$$\lim_{n\to+\infty} y(n) = 2$$

Partie C :

1. Voir table 1 du document réponse numéro 1.
2. Voir figure 1 du document réponse numéro 1.

Exercice 1 :

Spécialités Électrotechnique – Génie optique

Partie A :

Les bonnes réponses sont :

1. La probabilité de l'événement E_1 est égale $0,01$.
2. Si l'événement E_2 est réalisé, le signal reçu est 10.
3. La probabilité de l'événement E_2 est égale à $0,09$.
4. La probabilité de l'événement E_3 est égale à $0,81$.
5. La probabilité de l'événement E_4 est égale à $0,19$.

Partie B :

1. (a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.
   (b) On demande $p(X = 1)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} p(X=1) &= \mathrm{C}_{10}^{1}\, 0,1^1 \times 0,9^9 \\ &= 10 \times 0,1^1 \times 0,9^9 \\ &= 0,9^9 \\ &\approx 0,387 \end{aligned}$$

   (c) On demande $p(X \leqslant 1)$.

$$\begin{aligned} p(X \leqslant 1) &= p(X=0) + p(X=1) \\ &= \mathrm{C}_{10}^{0}\, 0,1^0 \times 0,9^{10} + p(X=1) \\ &= 0,9^{10} + p(X=1) \\ &\approx 0,736 \\ &\approx 0,74 \text{ à } 0,01 \text{ près} \end{aligned}$$

2. (a) La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,002$. Par conséquent, par approximation de cette loi binomiale par une loi de Poisson, l'espérance est conservée.
   Pour une loi binomiale, l'espérance est égale à np, qui est égale au paramètre λ de la loi de Poisson.
   On a alors ici : $\lambda = 0,002 \times 1000 = 2$.
   (b) On demande $p(Y \geqslant 1)$.

$$\begin{aligned} p(Y \geqslant 1) &= 1 - p(Y=0) \\ &\approx 1 - 0,135 \\ &\approx 0,865 \text{ à } 0,001 \text{ près} \end{aligned}$$

Partie C :

1. (a) Pour avoir un chiffre 1, il faut que $4 + U \geqslant 2$, c'est-à-dire $U \geqslant -2$.
   (b) Comme U suit la loi normale $\mathscr{N}(0\,;0,7)$ alors $T = \dfrac{U}{0,7}$ suit $\mathscr{N}(0\,;1)$.

$$\begin{aligned} p(U \geqslant -2) &= p\left(T \geqslant -\frac{2}{0,7}\right) \\ &= p(T \geqslant -2,857) \\ &= p(T \leqslant 2,857) \\ &\approx 0,998 \end{aligned}$$

2. Comme U suit la loi normale $\mathscr{N}(0\,;\sigma)$ alors $T = \dfrac{U}{\sigma}$ suit $\mathscr{N}(0\,;1)$.

On a

$$\begin{aligned} p(U < -2) &= p\left(T < -\frac{2}{\sigma}\right) \\ &= p\left(T > \frac{2}{\sigma}\right) \\ &= 1 - p\left(T < \frac{2}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Il faut alors résoudre l'inéquation

$$\begin{aligned} p(U < -2) &< 0,001 \\ 1 - p\left(T < \frac{2}{\sigma}\right) &< 0,001 \\ 0,999 &< p\left(T < \frac{2}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire , d'après la table de la loi normale,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sigma} &\geqslant 3,1 \\ \sigma &\leqslant 0,645 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Toutes spécialités

Partie A :

1. Voir figure 2 du document réponse.
2. On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 0,5(t-1)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{4}\times 2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. (a) On a

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2\pi}{2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

(b) On a, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} 0,5(t-1)\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-1)\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On procède à une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} u(t) = t+1 \\ v'(t) = \sin \pi t \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = 1 \\ v(t) = -\dfrac{1}{\pi}\cos \pi t \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}(t-1)\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{\pi}(t+1)\cos \pi t\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos \pi t\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{\pi}\cos \pi + \frac{1}{\pi^2}\left[\sin \pi t\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient alors

$$b_1 = \frac{1}{\pi}$$

4. (a) On a, pour tout nombre réel $t \in\,]-1\,;1[\,,\quad g(t) = 0,5t$.
Pour la représentation graphique, voir figure 3 du document réponse.

(b) Comme la fonction g est impaire, la courbe représentative de la fonction g est symétrique par rapport à l'origine du repère.

(c) La fonction g étant impaire, pour tout entier naturel n, les coefficients de Fourier $a_n(g)$ sont nuls. Or, on a, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} g(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} (f(t)-0,5)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t - 0,5\times\frac{2}{T}\int_{-1}^{1}\cos n\pi t\,\mathrm{d}t \\
&= a_n(f) - \frac{1}{T}\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_{-1}^{1} \\
&= a_n(f)
\end{aligned}$$

D'où, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\quad a_n = 0$.

5. On a $f^2(t) = \dfrac{1}{4}(t+1)^2$, d'où

$$\begin{aligned}
f_{eff}^2 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(f(t))^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}(t+1)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}(t+1)^3\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{8}\times\frac{1}{3}\times 2^3 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

6. (a) On a

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}\frac{5269}{3600} \\
&\approx 0,324
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{P}{f_{eff}^2} \approx 0,972$$

(b) L'erreur commise est

$$\begin{aligned}
\frac{f_{eff}^2 - P}{f_{eff}^2} &= 1 - \frac{P}{f_{eff}^2} \\
&\approx 0,028 \\
&\approx 2,8\%
\end{aligned}$$

Partie B :

Remarque : *Cette question est mal posée, car il manque l'essentiel, à savoir que la fonction h vérifie les conditions de Dirichlet afin de s'assurer de la convergence de la série de Fourier vers la fonction h régularisée. Ici, nous allons donc supposer que c'est bien le cas...*

1. La série de Fourier ne comportant que des cos, par conséquent, la fonction h est paire.
2. Grâce à la parité de la fonction h, la courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, par conséquent, nous pouvons déjà éliminer les courbes 1 et 4.

   La fonction h est périodique de période 2 donc nous pouvons maintenant éliminer la courbe 3 qui représente une fonction périodique de période 1.

3. Par lecture graphique, nous avons $h(t) = \pi t$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
   Grâce à cette expression, nous avons donc que la fonction h est continue sur $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, par conséquent, à l'aide du théorème de Dirichlet, la série de Fourier de h converge en tout point de $\mathbf{R}$ vers la fonction h.

Document réponse numéro 1 à joindre avec la copie

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y(n)$	$0,18$	$0,35$	$0,50$	$0,63$	$0,76$	$0,87$	$0,97$	$1,07$	$1,15$	$1,23$	$1,30$

TABLE 1 – Tableau de valeur de la suite y

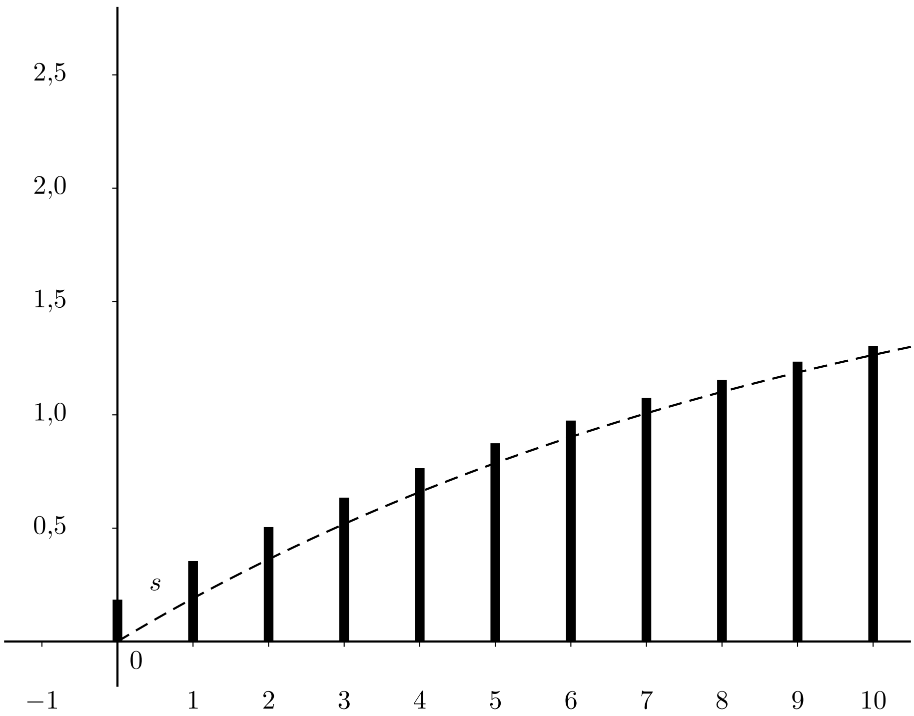

FIGURE 1 – Signal numérique y

Document réponse numéro 2 à joindre à la copie

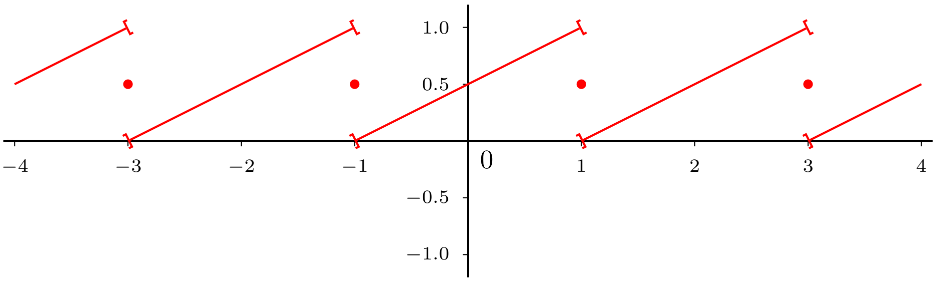

FIGURE 2 – représentation graphique de la fonction f

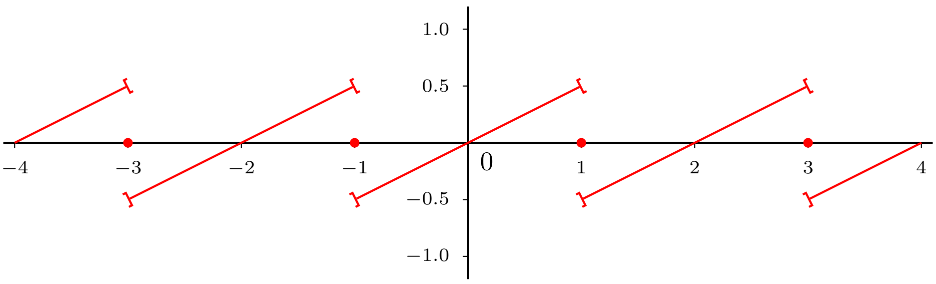

FIGURE 3 – représentation graphique de la fonction g

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr