Un encadrement serré pour 2013 ! - publié le 02/02/2013 mis à jour le 03/02/2013

Sujet n°9 (moyen)

• Enoncé

Soit la suite (x_n) définie par $x_0=1$ et la relation de récurrence :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2}{2013}$$

Démontrer que : $0{,}49<x_{2013}<0{,}5$

Solution:

On prouve facilement que la suite (x_n) est décroissante de limite nulle.
Cela nous assure qu'à partir d'un plus petit indice N on aura $x_N<0{,}5$.

B3 =B2-B2^2/2013

	A	B	C
1	n	x_n	
2	0	1	
3	1	0,9995032	
4	2	0,999007	
5	3	0,9985112	
6	4	0,9980159	
7	5	0,9975211	
8	6	0,9970268	
9	7	0,9965329	
10	8	0,9960396	
11	9	0,9955468	
12	10	0,9950544	
13	11	0,9945625	
14	12	0,9940712	
15	13	0,9935803	
16	14	0,9930898	
17	15	0,9925999	
18	16	0,9921105	
19	17	0.9916215	

A l'aide du tableur :on obtient N=2013.
Et en prime $x_{2013}>0{,}49$.

B2015 =B2014-B2014^2/2013

	A	B	C	D
009	2007	0,5006601		
010	2008	0,5005356		
011	2009	0,5004111		
012	2010	0,5002867		
013	2011	0,5001624		
014	2012	0,5000381		
015	2013	0,4999139		
016	2014	0,4997897		
017	2015	0,4996657		
018	2016	0,4995416		
019	2017	0,4994177		
020	2018	0,4992938		
021	2019	0,4991699		
022	2020	0,4990461		
023	2021	0,4989224		
024	2022	0,4987988		
025	2023	0,4986752		
026	2024	0,4985516		

On a donc vérifié que $0{,}49<x_{2013}<0{,}5$.
Cela dit on ne comprend pas "la raison" qui fait que cette encadrement est vrai.

Qui plus est, on conjecture, que toute suite du même type $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2}{N}$ avec $x_0=1$ va donner l' encadrement $0{,}49<x_N<0{,}5$.
On vérifie là aussi au tableur que la majoration est vraie pour toutes les valeurs de N>0 testées.
La minoration est vraie aussi dès que N>17 et jusqu'à N<4500 (je me suis arrêté là)

Je n'arrive hélas pas à le prouver dans le cas général. Mais on est tout de même certain de pouvoir recycler cet exercice pendant encore de nombreuses années.